

NOM : _____ **Prénom :** _____

**EXAMENS D'ADMISSION AUX GYMNASSES VAUDOIS
SESSION 2022**

ÉCOLE DE MATURITÉ

BRANCHE : MATHÉMATIQUES
SIGLE : EXAD-1M-MAT-03
EXAMEN : ÉCRIT

Durée : 3 heures

Matériel autorisé : **calculatrice TI-30 ECO RS, TI-30 X II S ou TI-30 X II B, règle, équerre, rapporteur, compas, formulaire joint à l'épreuve.**

Consignes :

- Le candidat rédige les solutions directement sur les feuilles de données dans l'espace prévu à cet effet sous chaque question (il n'utilise pas la couleur rouge).
- Lorsque cet espace n'est pas suffisant, le candidat l'indique clairement dans sa réponse et termine au verso.
- Les feuilles de brouillon ne sont pas corrigées.
- La rédaction doit être soignée. Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés.
- La réponse doit être soulignée ou encadrée.

Partie technique : _____ / **30 pts** (30% du total des points)

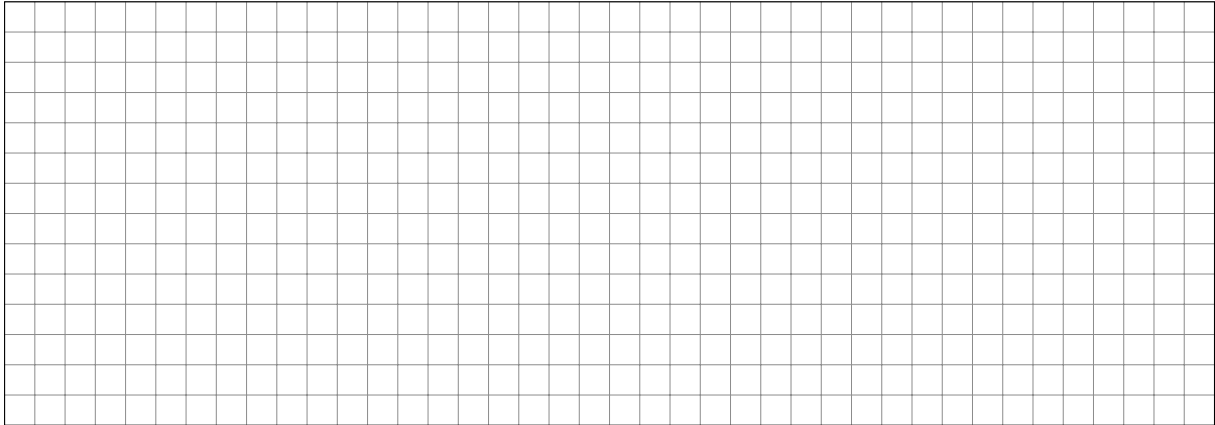
Partie analyse-réflexion : _____ / **70 pts** (70% du total des points)

Total : _____ / **100 pts**

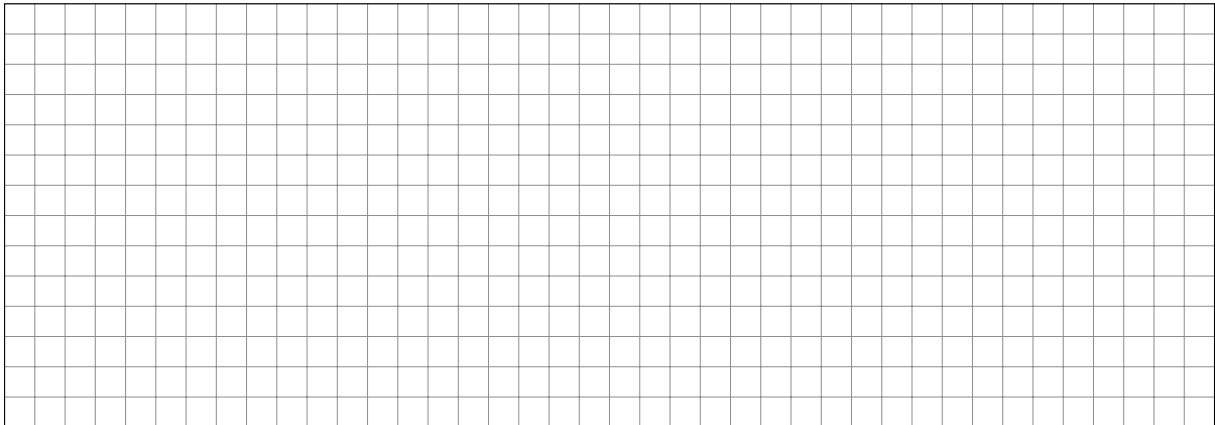
Partie technique**Question 1****/7 pts**

Calculer en détaillant tous les calculs et donner la réponse sous forme de fraction irréductible.

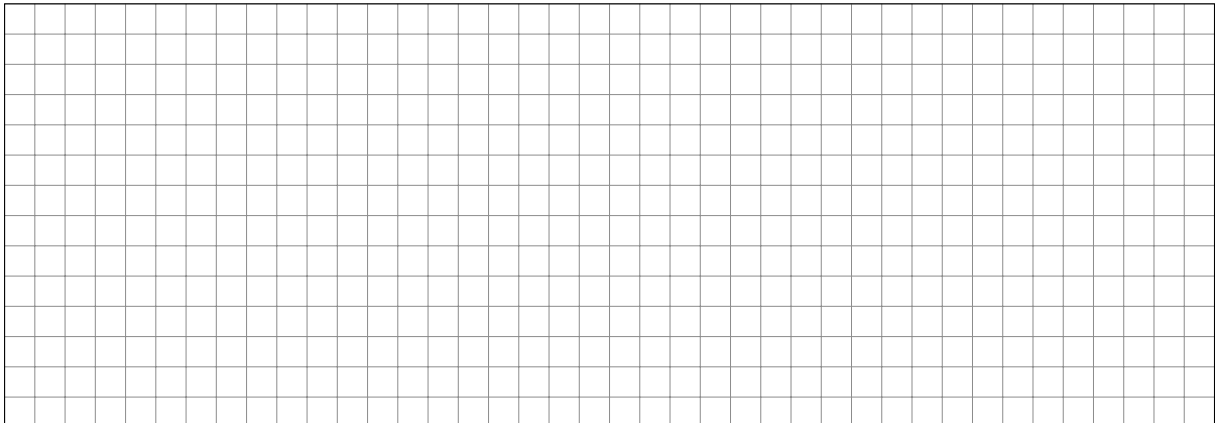
a) $\left(\frac{3}{4} - 2\right)^2 - \frac{5}{4}$



b) $\left(-\frac{5}{3} + \frac{7}{6}\right) \cdot \frac{4}{11}$



c) $-\frac{4}{7} - \frac{5}{7} \div \frac{3}{2} + \frac{8}{3}$

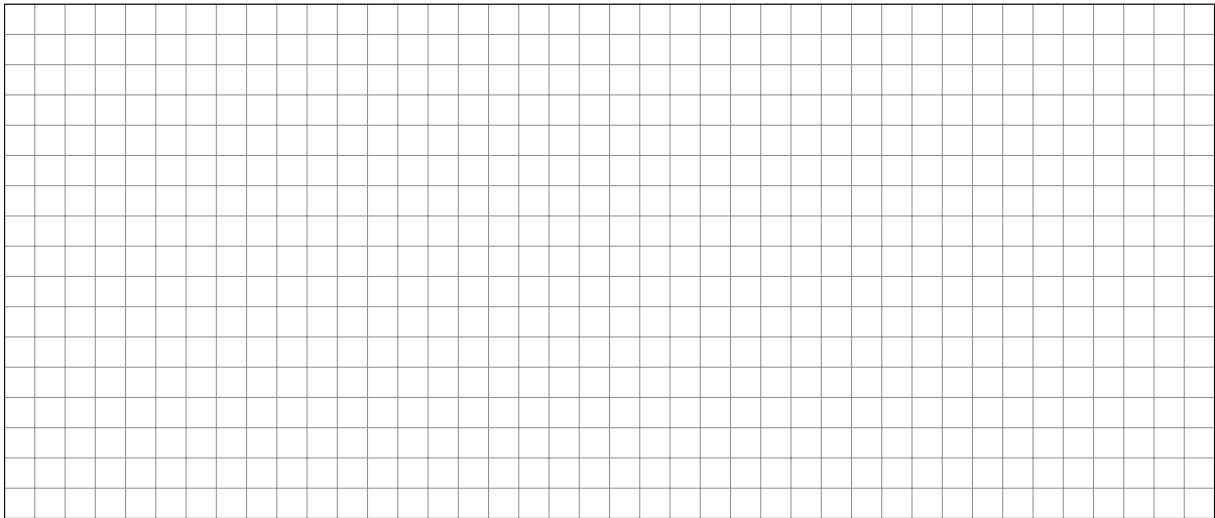


Question 2

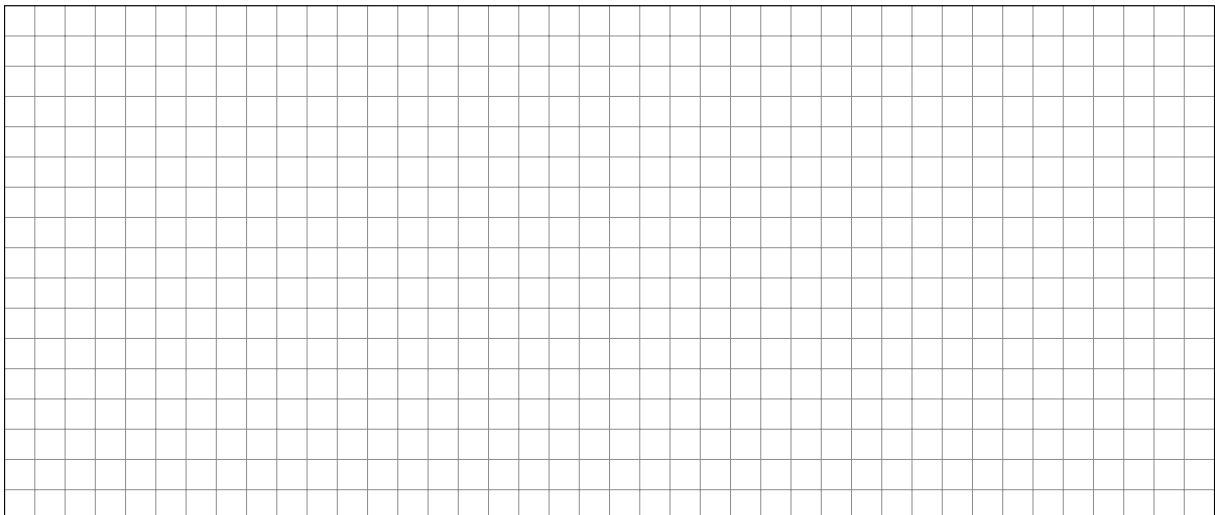
/ 7 pts

Effectuer et réduire.

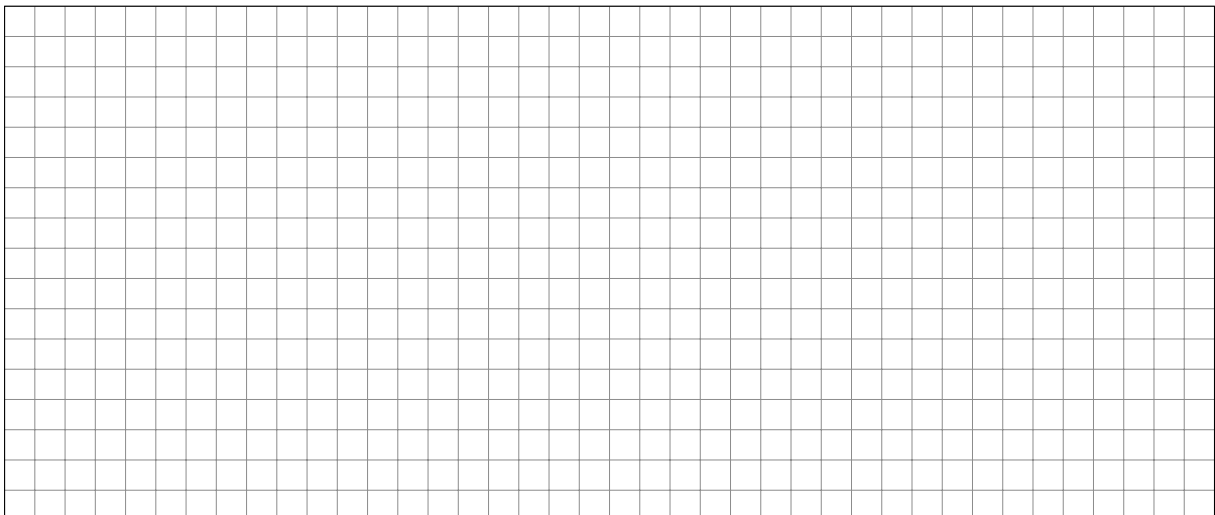
a) $(x - 3y)(3x + y) + (x - 4y)^2$



b) $x(x - 1)(x - 2) - (x - 3)(x + 4)$



c) $(2a - b)(2a + b) + 4a(a - 2b)$



Question 3

/8 pts

Résoudre les équations suivantes et donner chaque réponse sous forme de fraction irréductible.

a) $\frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} = \frac{3x+8}{9}$

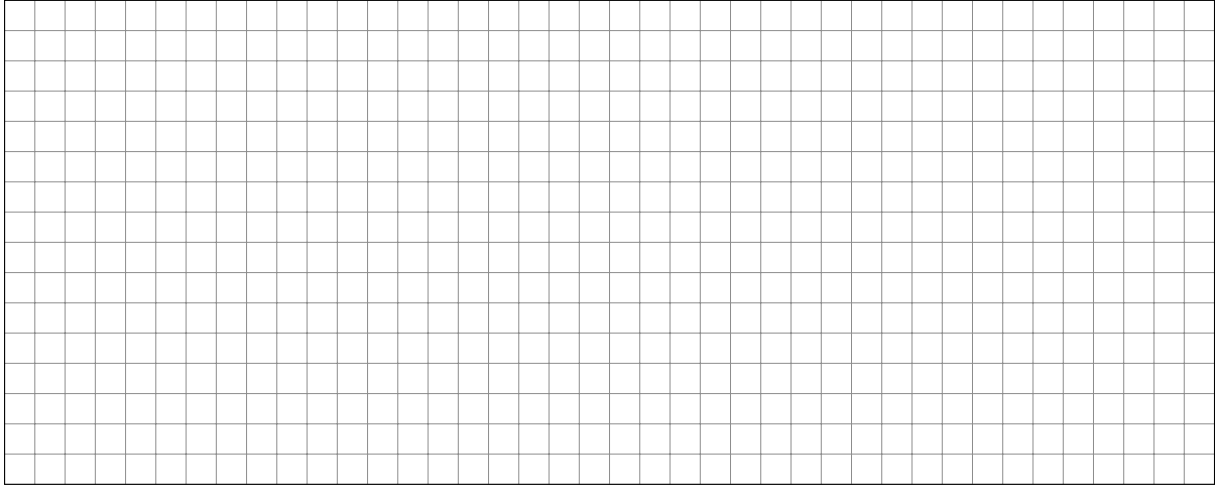
b) $(3x-2)^2 = (2x+1)(4x-5)$

c) $4 - 3(5x+2) = 7(4x+11) - 2(7x-4)$

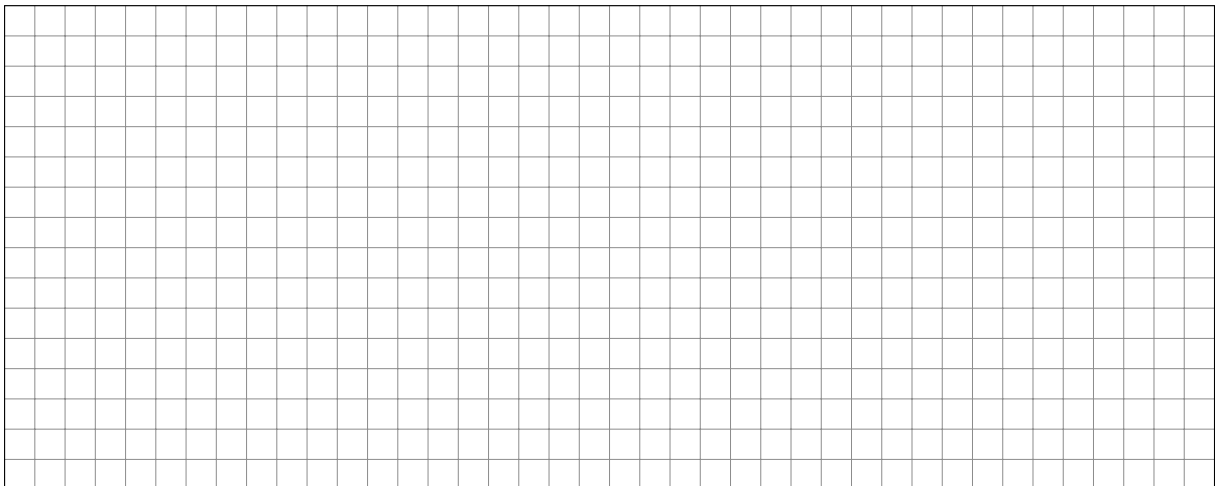
Question 4**/4 pts**

Factoriser au maximum les polynômes suivants.

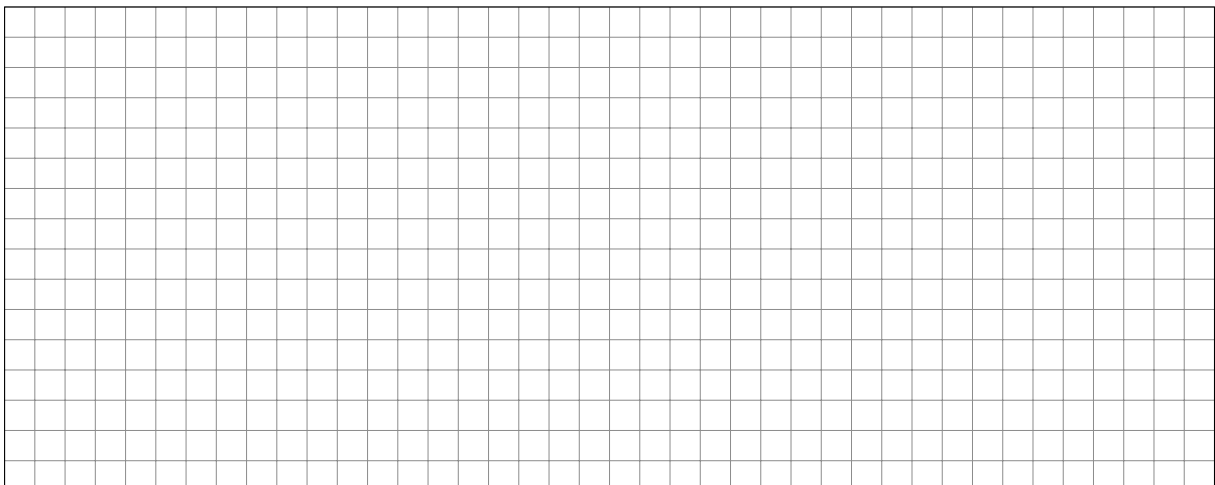
a) $x^2 - 80 + 16x$



b) $5x^4 + 40x^3 + 75x^2$



c) $9x^2 + 54x + 81$

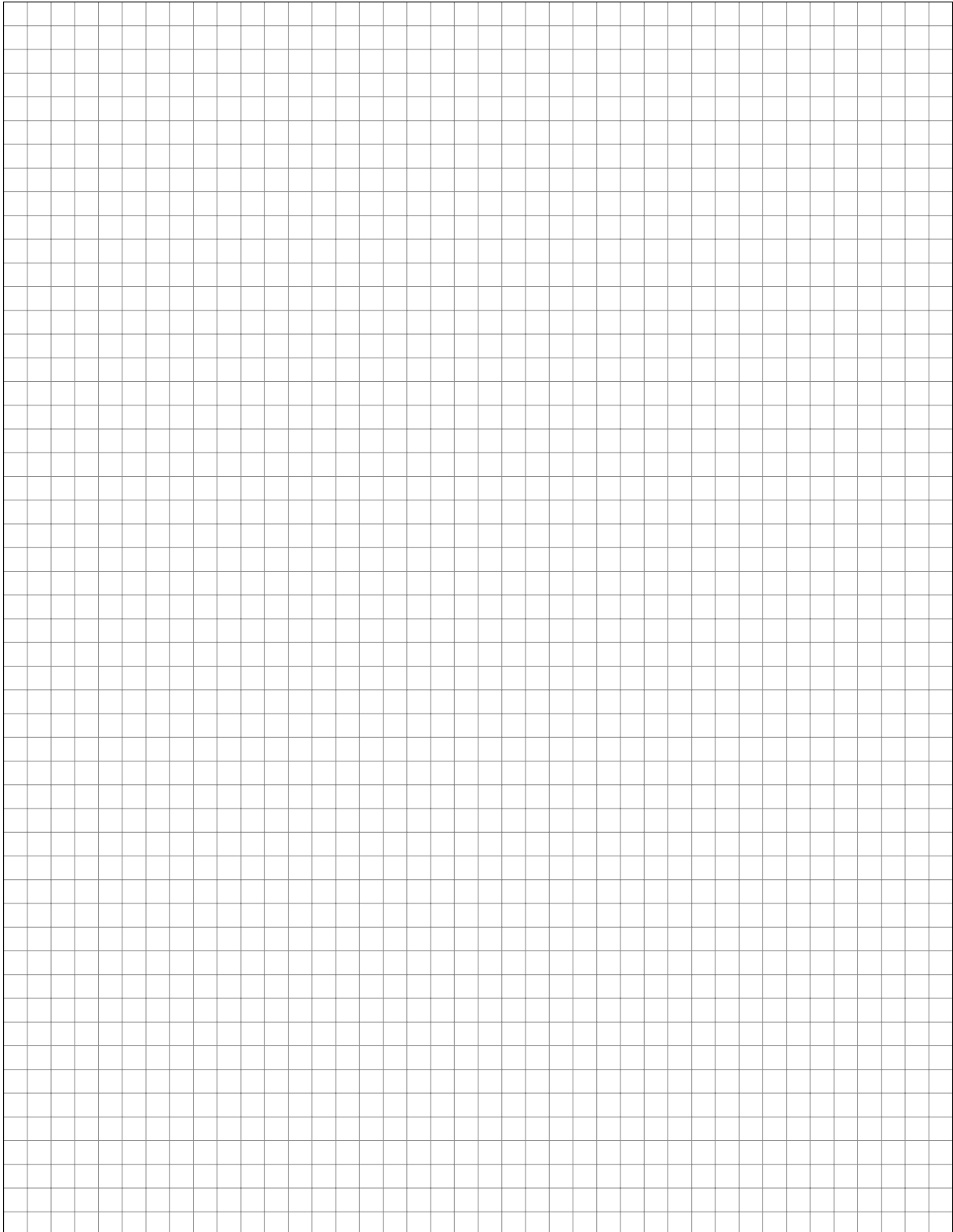


Question 5

/4 pts

Résoudre le système d'équations suivant et donner les solutions sous forme de fractions irréductibles.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 3 \\ 12x - 15y = -2 \end{cases}$$



Partie analyse-réflexion

En règle générale, tous les résultats seront arrondis à deux décimales.

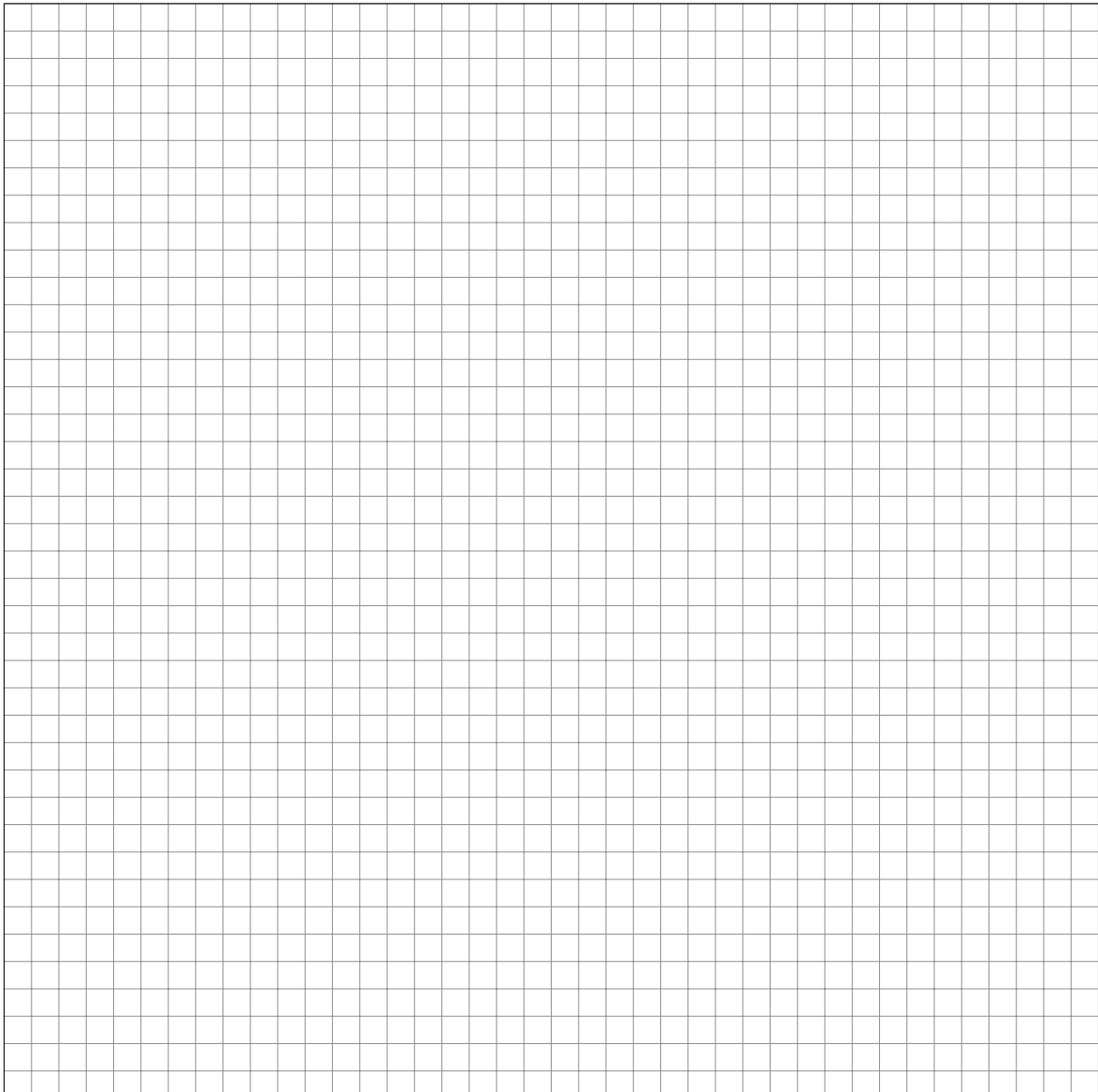
Problème 1

/5 pts

En faisant des paris avec ses copains, le petit Bob gagne ou perd des cartes Pocket. Lorsqu'il rentre chez lui l'après-midi, il compte ses cartes. Cette semaine, il a joué tous les jours sauf lundi.

En rentrant mardi après-midi, il constate avoir 3 cartes de moins par rapport à lundi mais il a 4 cartes de plus que mercredi après-midi. En fin de journée jeudi, le nombre de cartes de Bob dépasse de un cinquième le nombre de cartes de la veille. Avec 5 cartes gagnées le vendredi, Bob termine la semaine avec le même nombre de cartes qu'il a compté le lundi en fin d'après-midi.

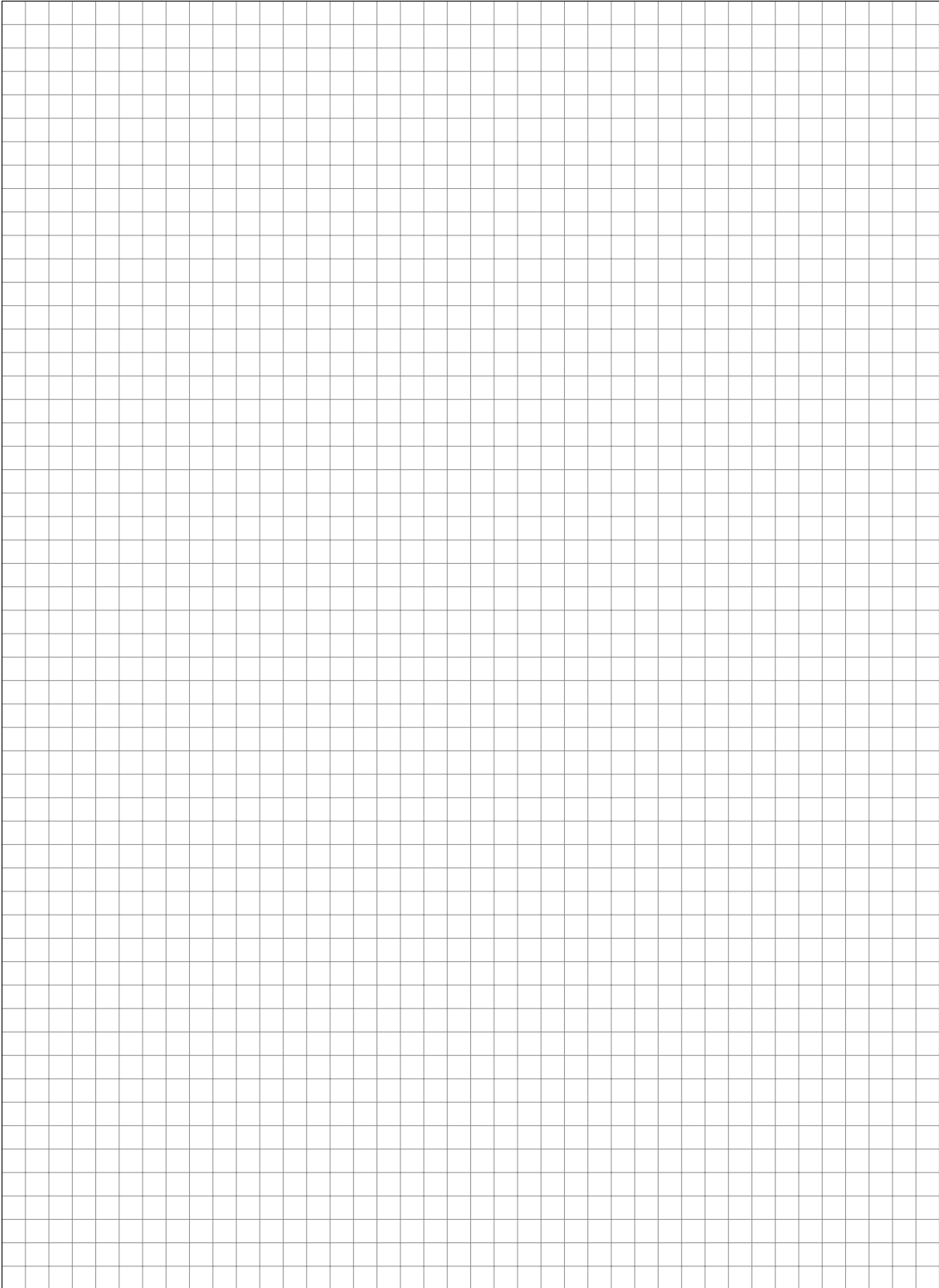
Déterminer le nombre de cartes Pocket de Bob le vendredi en fin de journée,



Problème 2

/7 pts

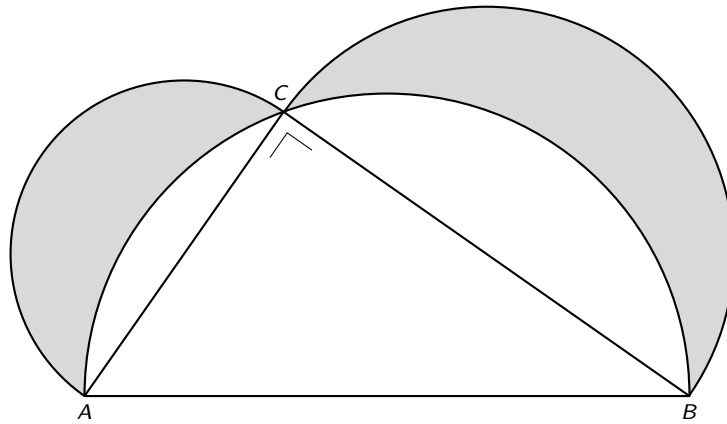
En 2009, la petite Lily a le tiers de l'âge de sa mère. En 2021, l'âge de la mère est le double de celui de Lily. Calculer les années de naissance de Lily et de sa mère.



Problème 3

/ 10 pts

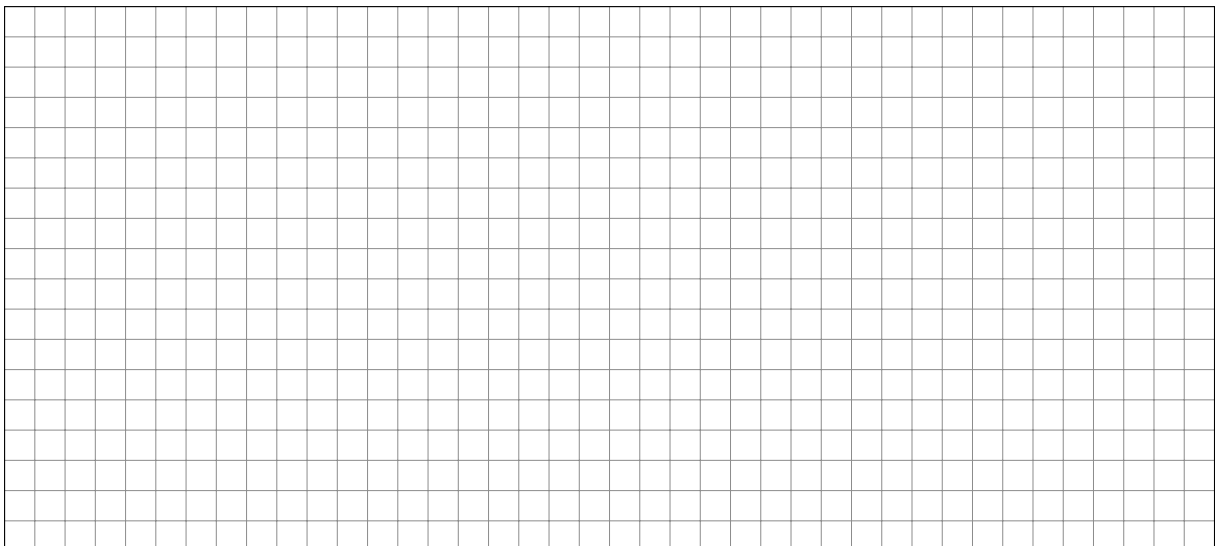
On considère le triangle ABC rectangle en C dont on connaît $[AC] = 6$ cm et $[BC] = 8$ cm. On construit le demi-cercle de Thalès du segment $[AB]$ ainsi que les demi-cercles de Thalès de $[AC]$ et de $[BC]$.



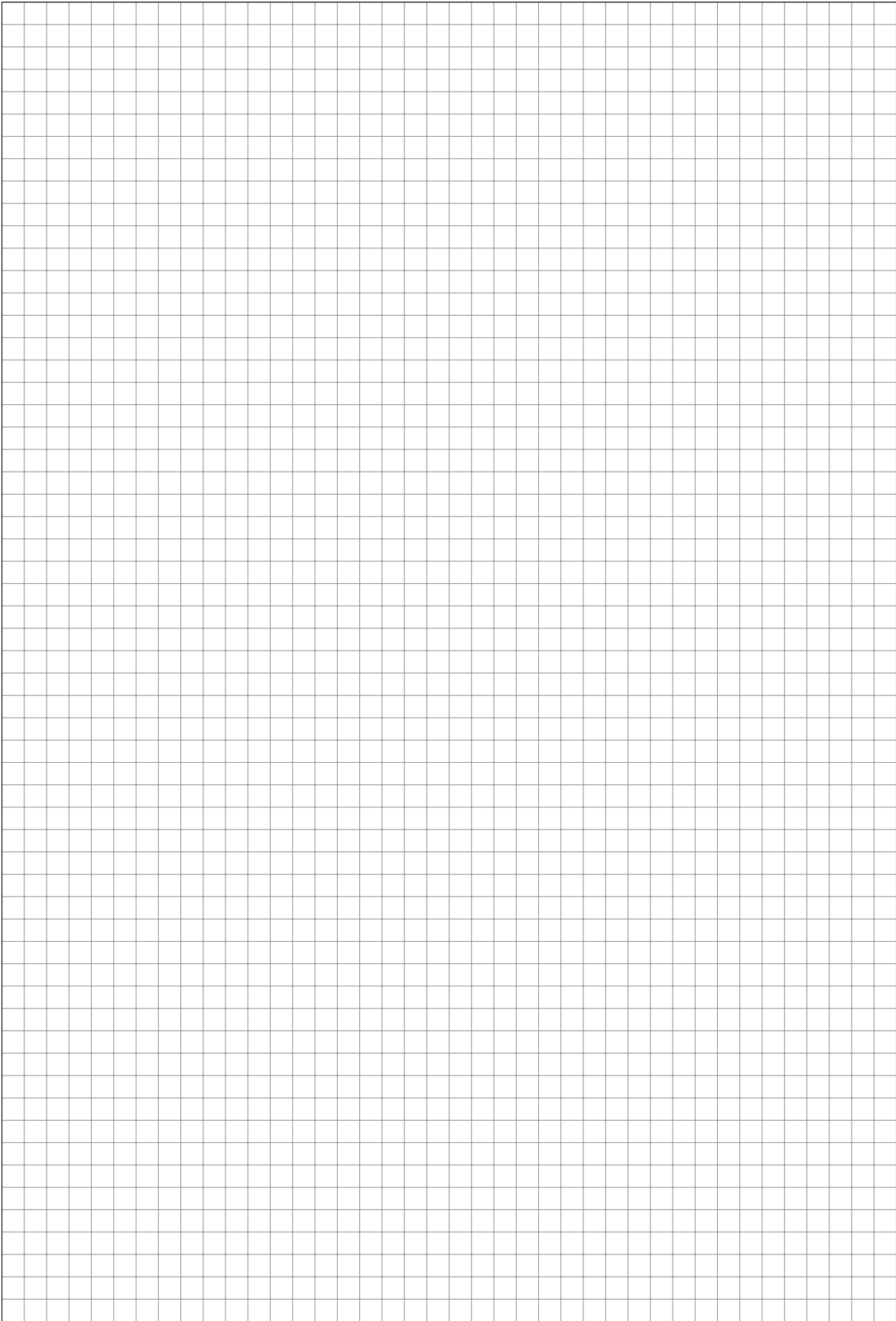
a) Calculer l'aire du triangle ABC .



b) Calculer l'aire du demi-disque de diamètre $[AB]$.



c) Montrer par calcul que la somme des aires des deux lunules en gris est égale à l'aire du triangle *ABC*.



Problème 4

/ 25 pts

L'obélisque de Louxor a été érigé en 1836 au milieu de la place de la Concorde à Paris. Il est formé d'une pyramide régulière tronquée à base carrée, surmontée d'une petite pyramide régulière à base carrée, cette dernière étant appelée pyramidion. Les dimensions de l'obélisque sont indiquées dans les schémas ci-dessous (ces schémas ne sont pas à l'échelle).

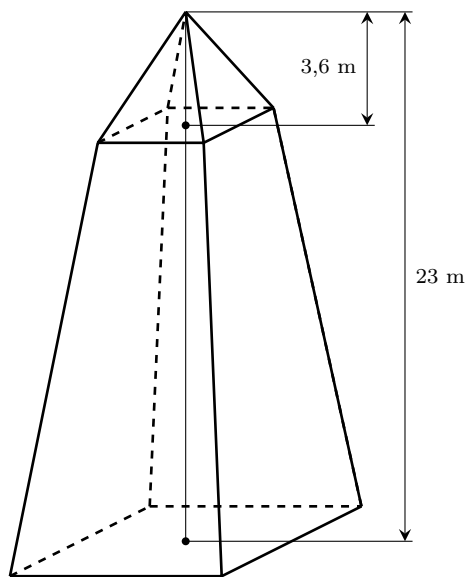


fig. 1 – Vue en perspective

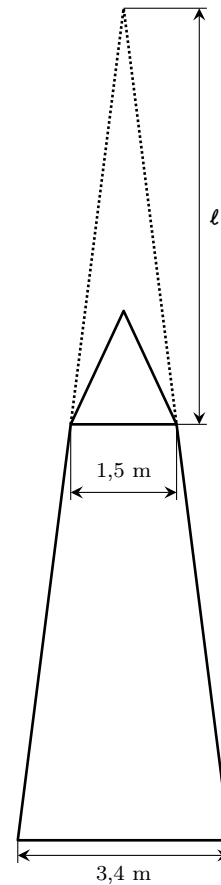
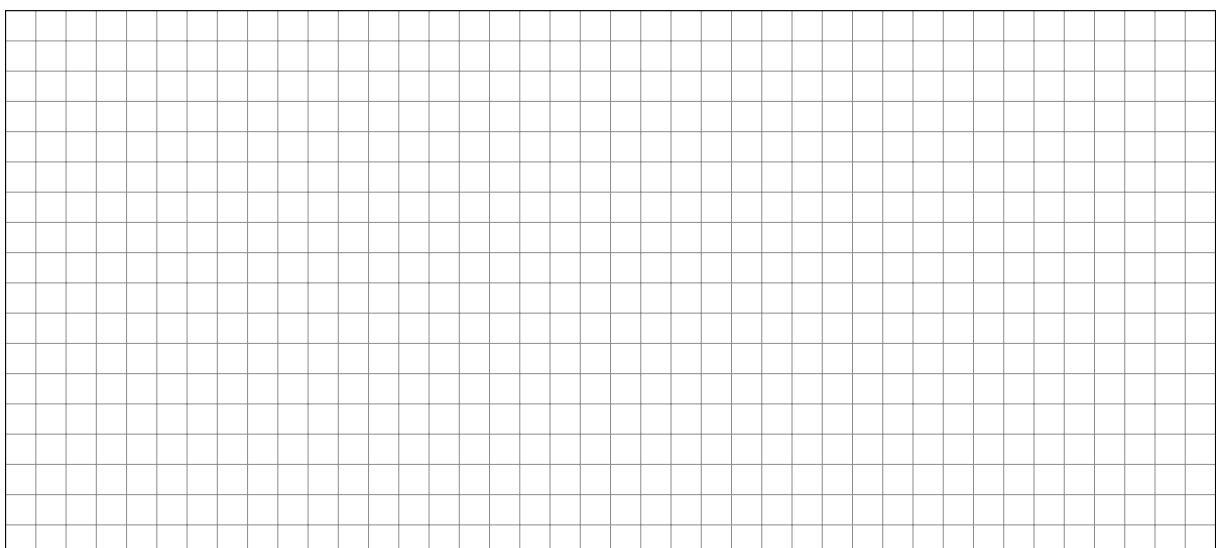
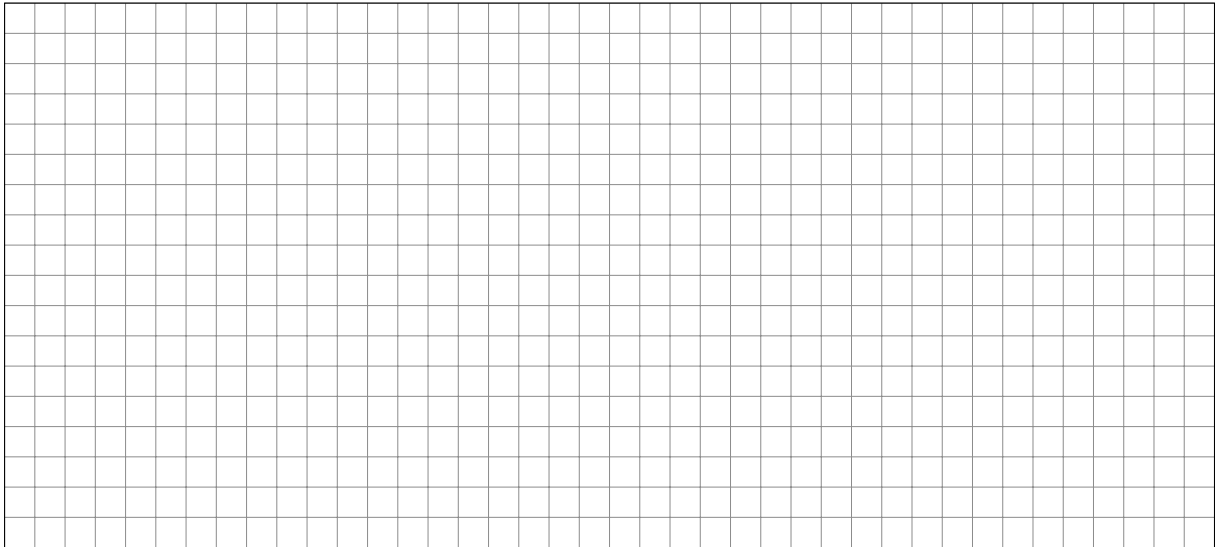


fig. 2 – Vue de face

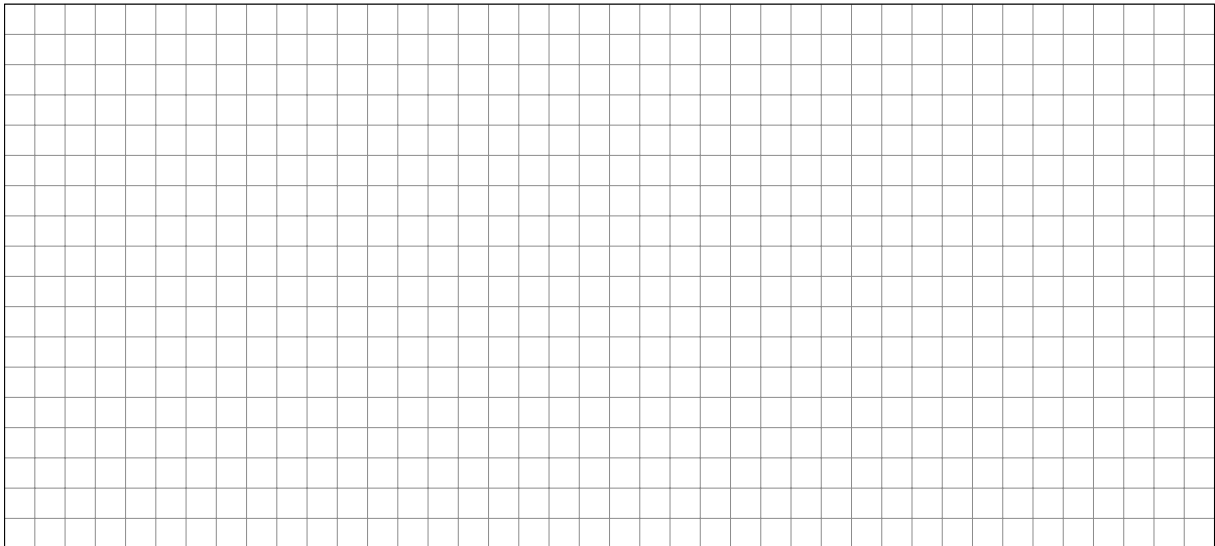
a) Calculer le volume du pyramidion (résultat en m^3).



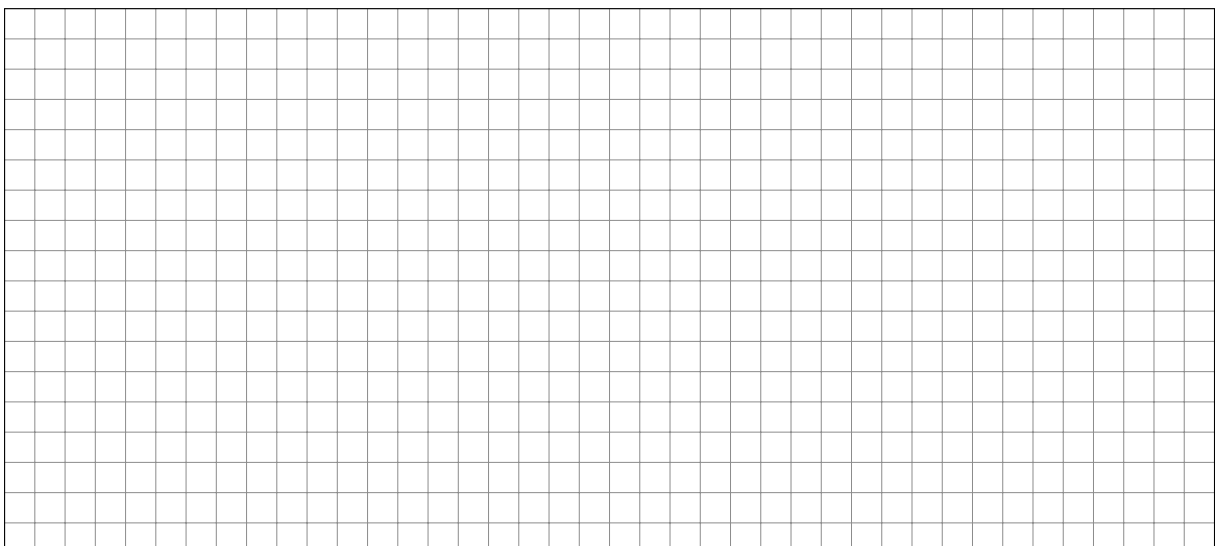
b) Calculer la hauteur de la pyramide tronquée (résultat en m).



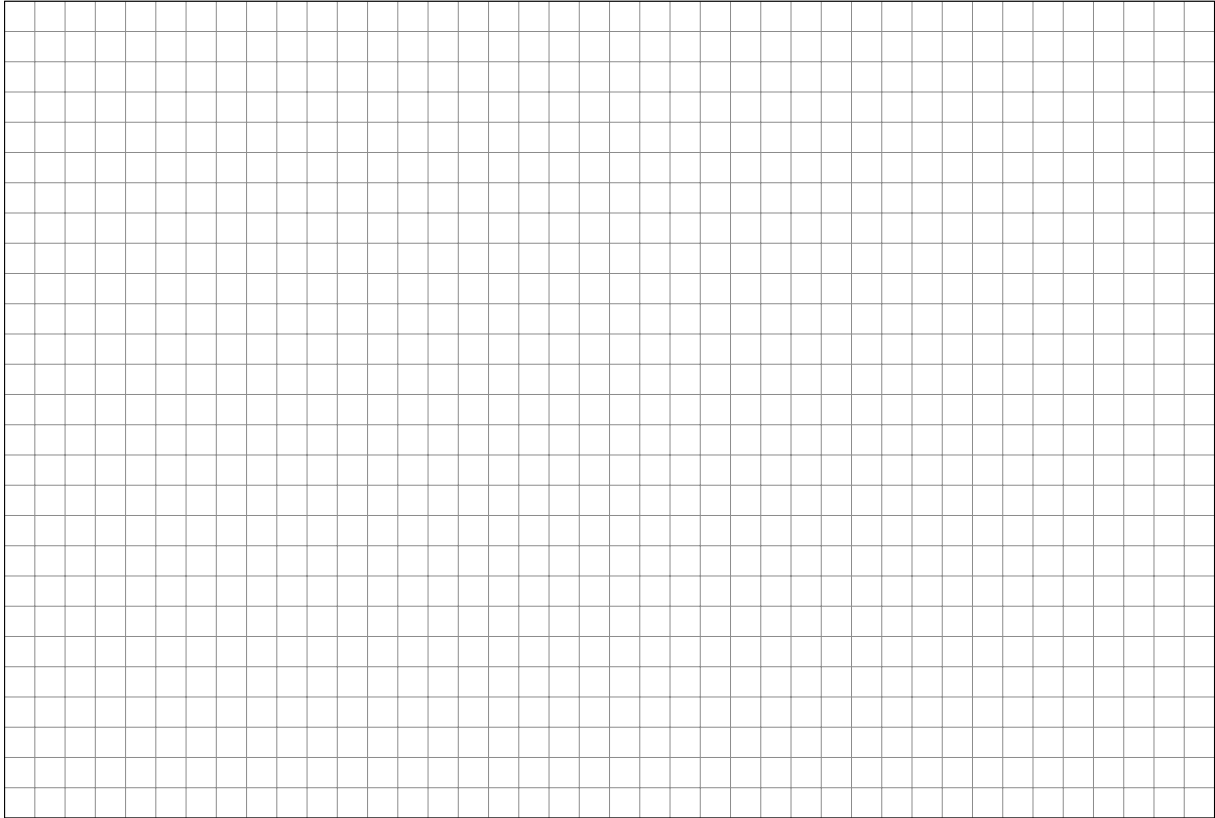
c) Montrer que si on complète la pyramide tronquée, comme sur le schéma de la page 11, la longueur ℓ vaut environ 15,3 m.



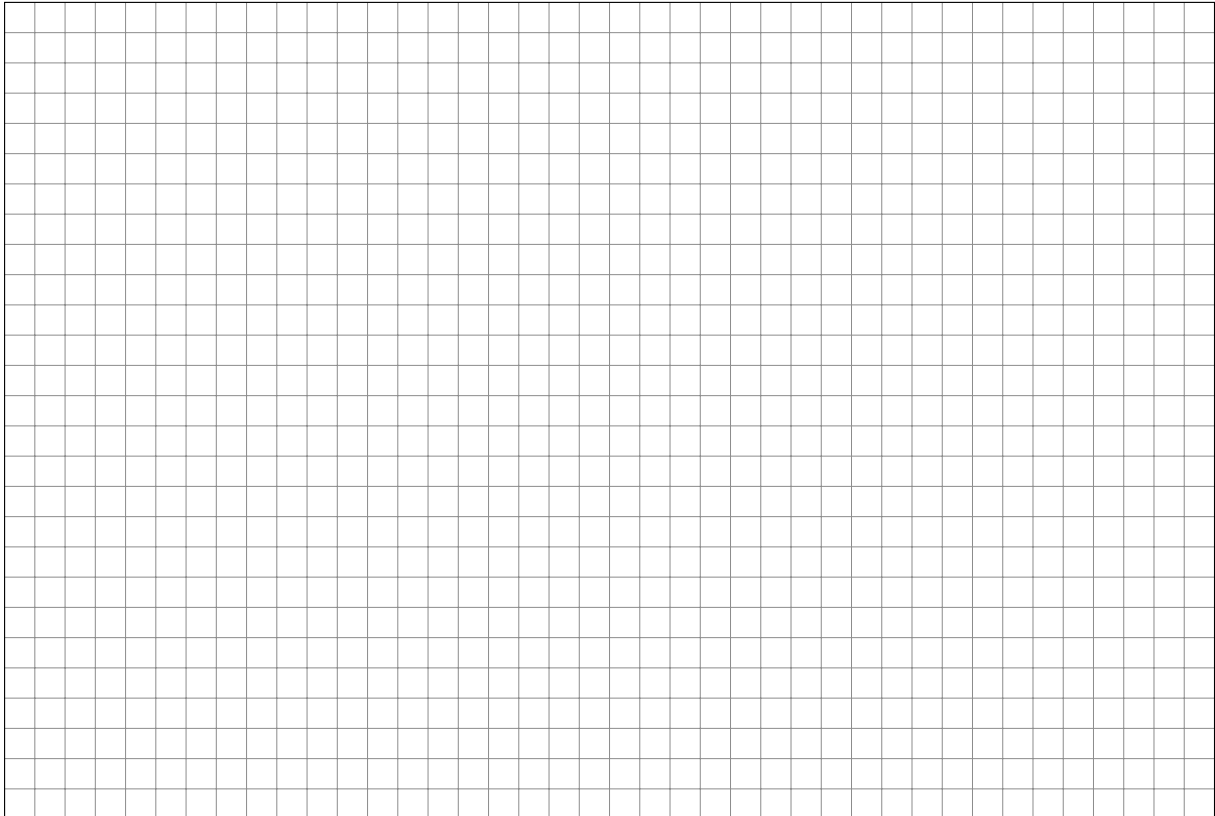
d) Calculer le volume de la pyramide tronquée (résultat en m^3).



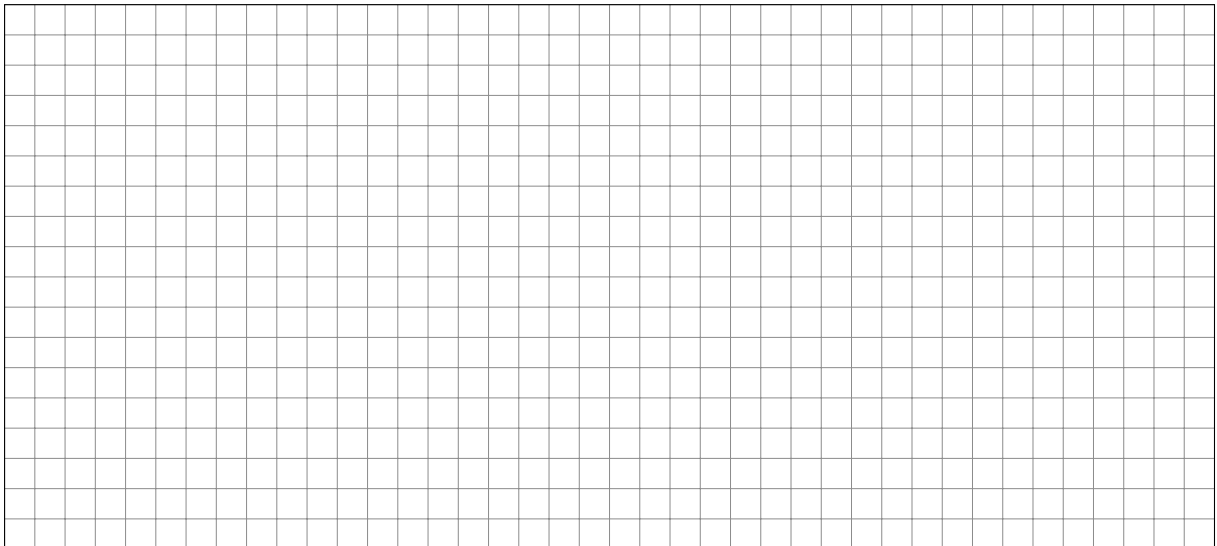
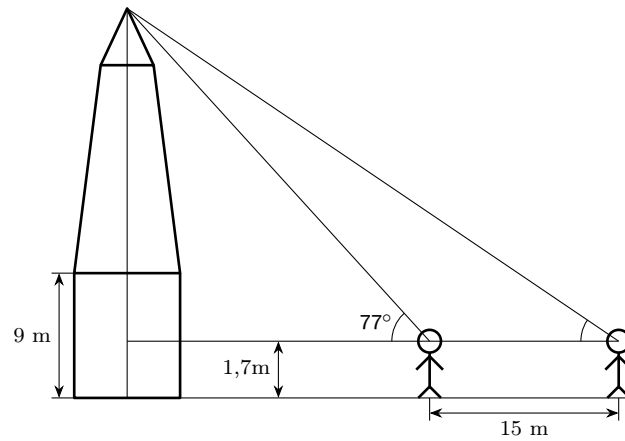
e) L'obélisque est en granit rose, dont la masse volumique est $2,62 \text{ g/cm}^3$. Calculer la masse de l'obélisque (résultat en kg).



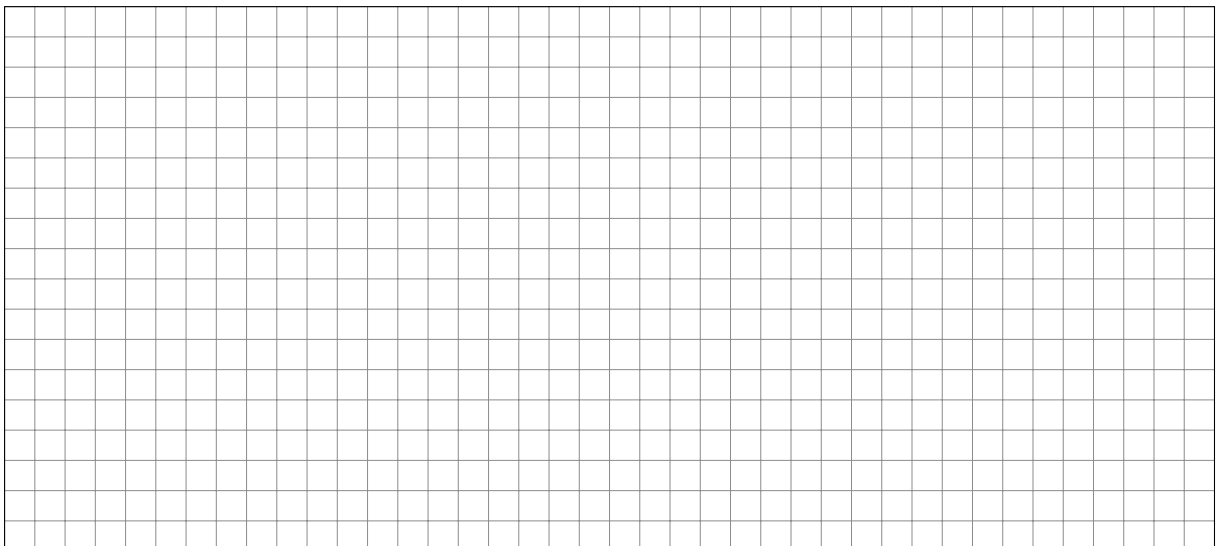
f) La partie visible du pyramidion est recouverte d'une fine couche de bronze (dont l'épaisseur est négligeable). Calculer la surface en bronze (résultat en m^2).



g) L'obélisque est posé sur un socle en pierre de hauteur 9 m. Sur la place de la Concorde, un touriste (dont les yeux sont placés à 1,7 m du sol) regarde le point le plus haut de l'obélisque sous un angle depuis l'horizontale de 77° (voir schéma ci-dessous). Calculer l'angle depuis l'horizontale sous lequel il verra ce même point s'il recule de 15 m.



h) Sur un plan de la ville de Paris, l'obélisque est représenté par un carré d'aire 25 mm^2 . Calculer l'échelle qui a été utilisée pour réaliser ce plan.



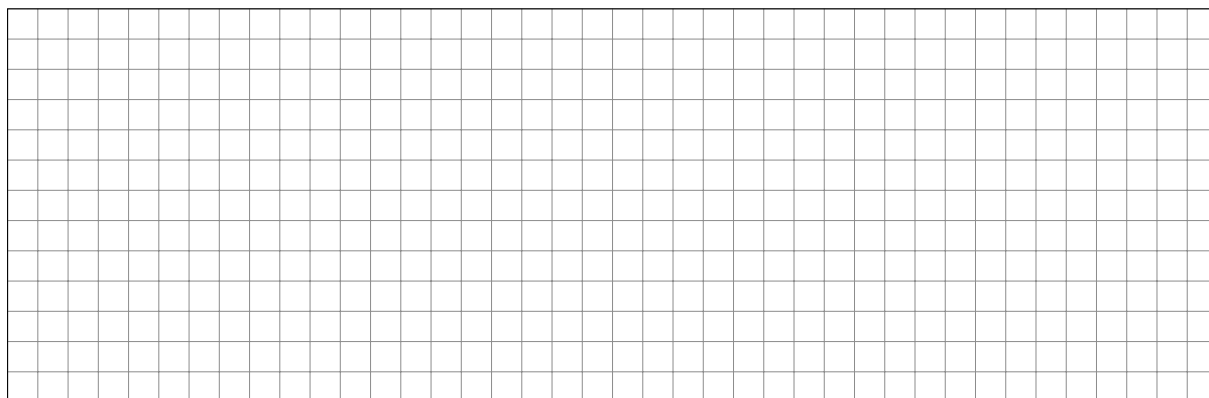
Problème 5

/ 13 pts

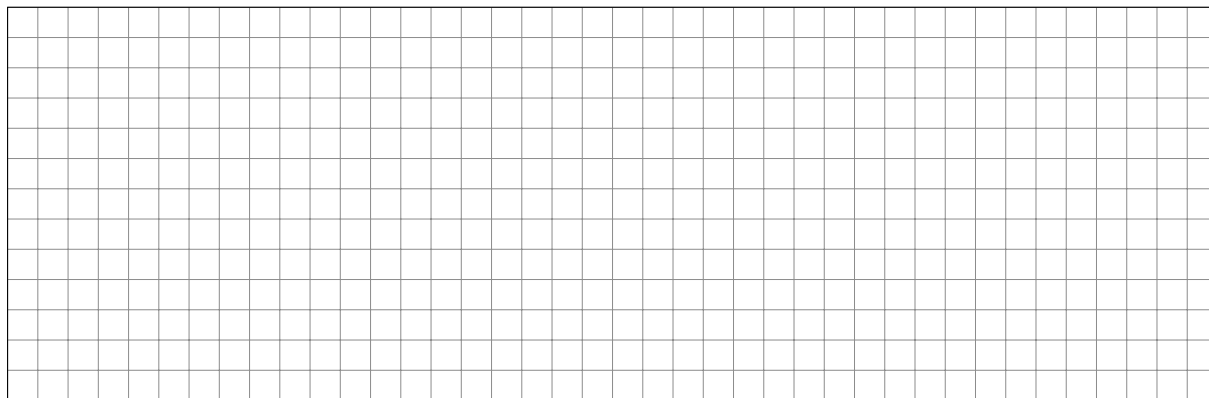
Un immeuble de 15 étages dispose de trois ascenseurs. Les ascenseurs 1 et 2 sont du même modèle et se déplacent à 2m/s en montée et 2,5m/s en descente. L'ascenseur 3 est un monte-charge dont la vitesse est différente. Chaque étage mesure 3 m de hauteur.

Au même instant ($t = 0$), les trois ascenseurs démarrent. L'ascenseur 1 quitte le niveau 0 en montée et l'ascenseur 2 quitte le niveau 13 en descente. Toutes les hauteurs sont mesurées depuis le niveau 0.

a) Donner l'expression fonctionnelle de la fonction h_1 qui donne la hauteur (en m) de l'ascenseur 1 en fonction du temps t (en s).

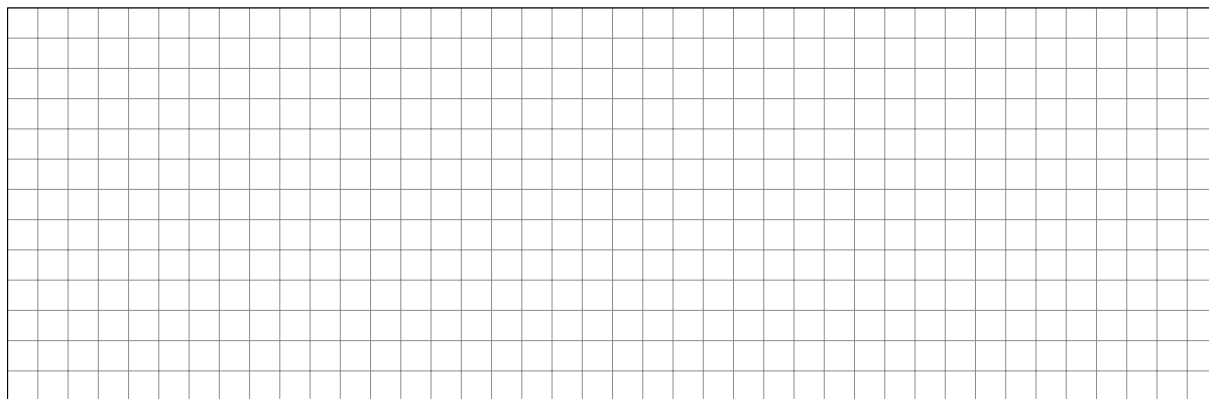


b) Donner l'expression fonctionnelle de la fonction h_2 qui donne la hauteur (en m) de l'ascenseur 2 en fonction du temps t (en s).

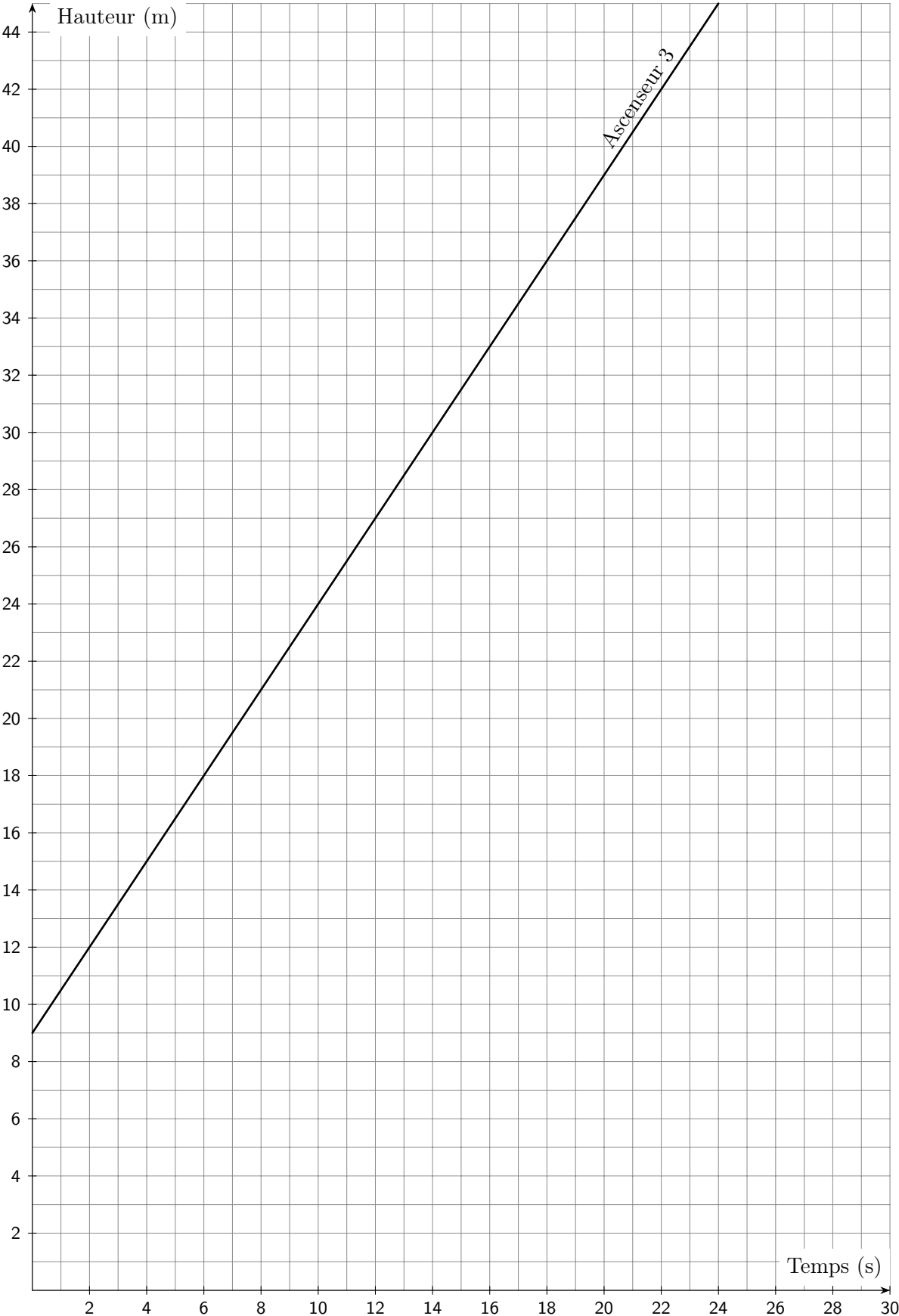


c) Le graphe de la fonction h_3 qui donne la hauteur (en m) de l'ascenseur 3 en fonction du temps t (en s) est donné dans le système d'axes de la page 16, à la question d).

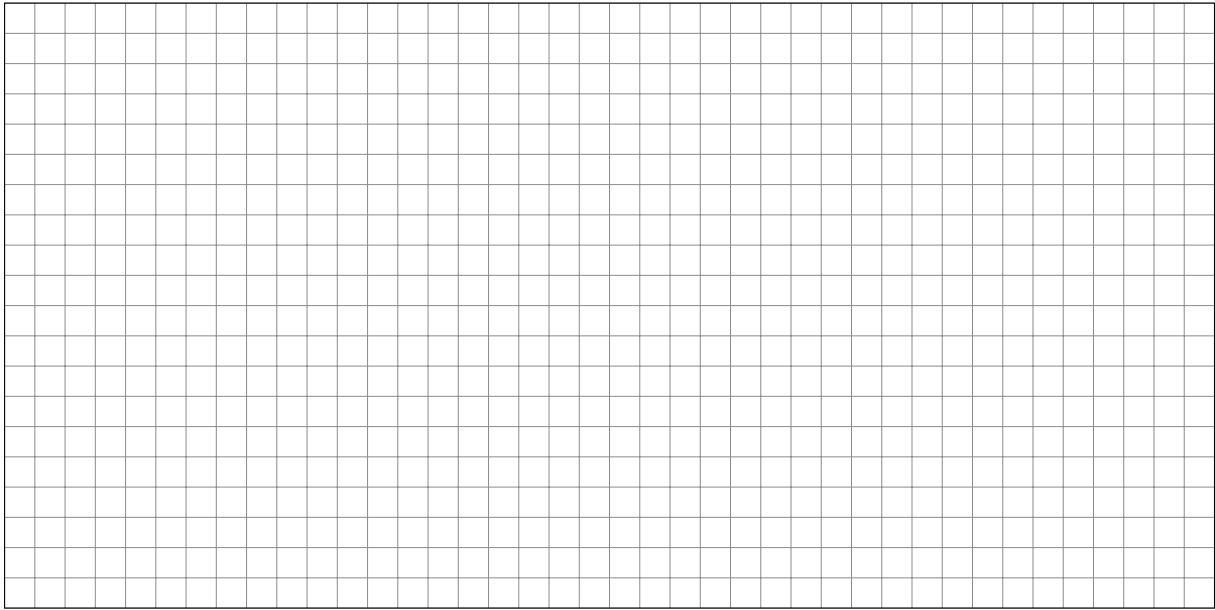
Déterminer le niveau depuis lequel l'ascenseur 3 est parti ainsi que sa vitesse (en m/s).



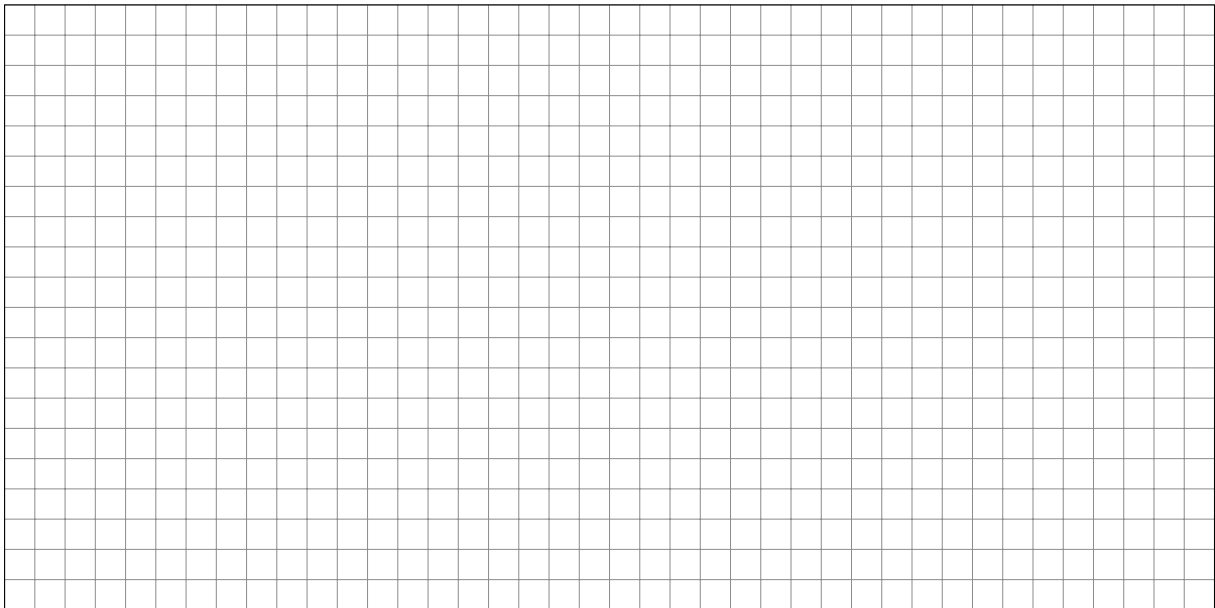
d) Tracer les graphes des fonctions h_1 et h_2 dans le système d'axes ci-dessous.



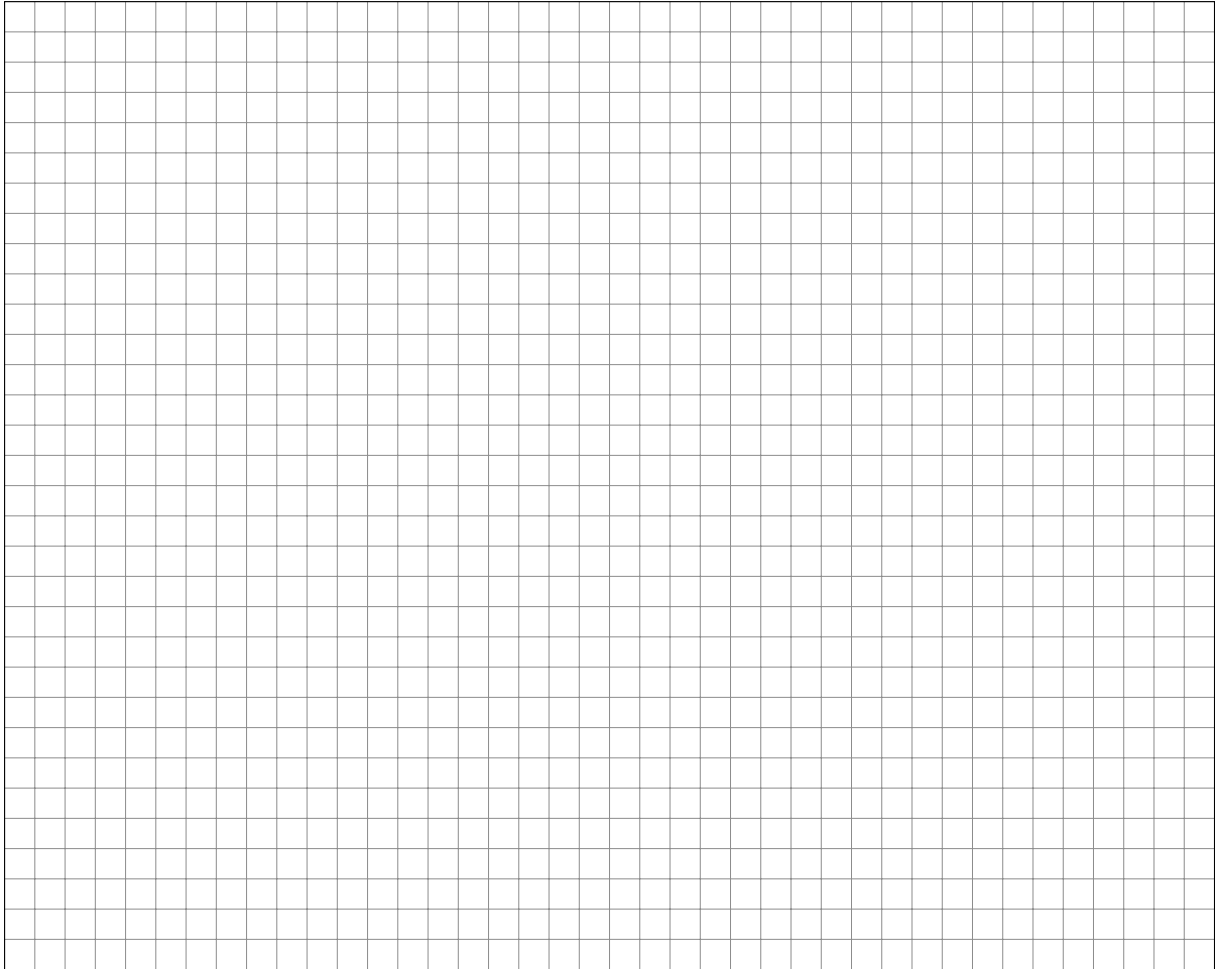
e) Déterminer graphiquement lequel des trois ascenseurs passe le premier par le niveau 7.



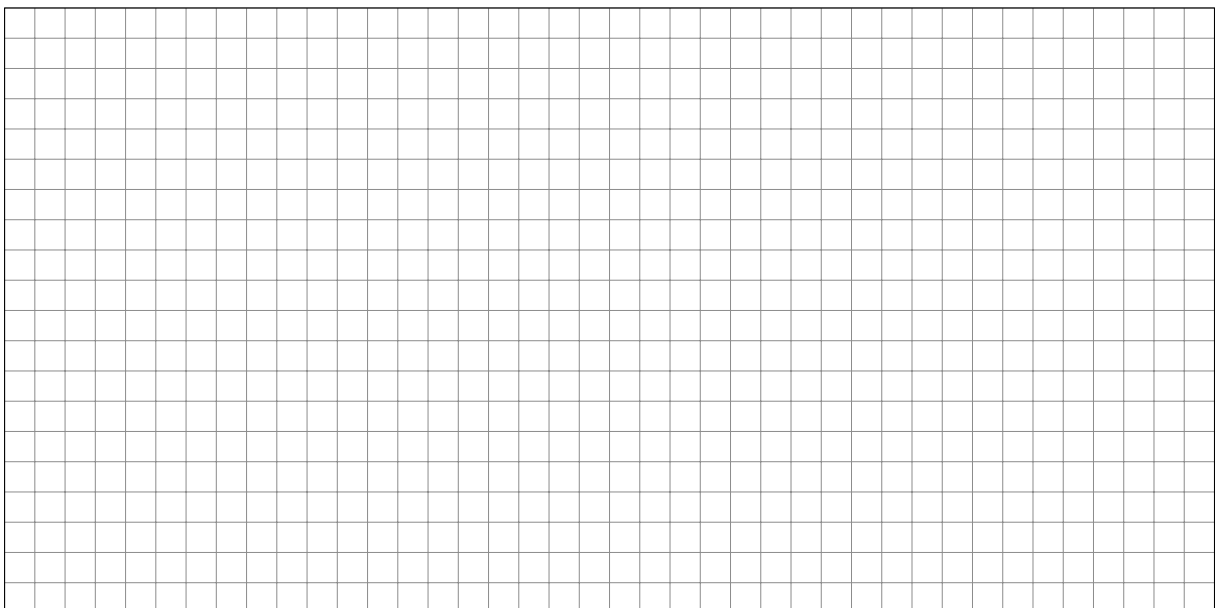
f) Déterminer par calcul l'instant t (en secondes) où les ascenseurs 1 et 2 se croisent. De quel niveau seront-ils alors les plus proches? Justifier.



b) L'expression fonctionnelle de f est $f(x) = -x^2 + mx + 3$.
Déterminer algébriquement la valeur de m .



c) Soit g une fonction affine telle que $g(-4) = 2$ et dont le graphe est une droite de pente $-\frac{2}{5}$.
Estimer graphiquement les coordonnées du (ou des) point(s) d'intersection entre le graphe de g et le graphe de f .



Problème 7

/ 3 pts

Les graphes de quatre fonctions quadratiques sont représentés ci-dessous. Identifier les graphes qui correspondent aux fonctions suivantes :

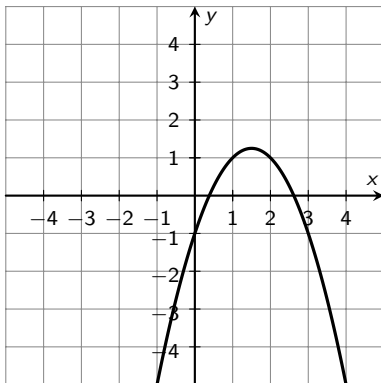
$$f_1(x) = x^2 - 3x - 1$$

$$f_2(x) = -x^2 + 3x - 1$$

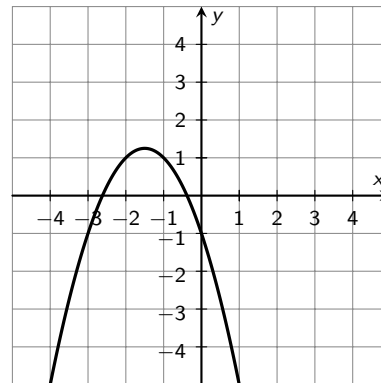
$$f_3(x) = -x^2 - 3x - 1$$

$$f_4(x) = x^2 + 3x - 1$$

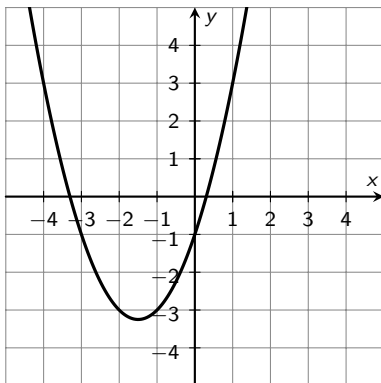
Noter la fonction sous le graphe qui lui correspond (aucune justification n'est demandée).



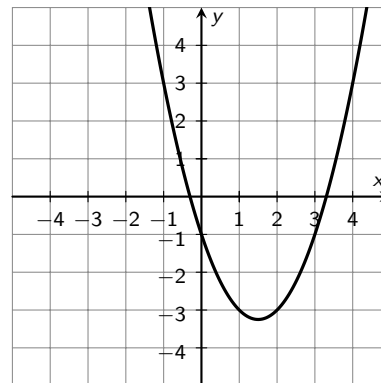
.....



.....



.....



.....