LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES MATHÉMATIQUES EN SIXIÈME ANNÉE

Analyse de copies d'élèves aux épreuves cantonales de référence

Anne-Lise Longchamp

140 / Septembre 2009

canton de vaud

LIBERTÉ ET PATRIE

URSP

Unité de recherche pour le pilotage des systèmes pédagogiques

Dans le cadre des missions de l'URSP,
ses travaux sont publiés sous l'égide
du Département de la Formation, de la Jeunesse et de la Culture.
Les publications expriment l'avis de leurs auteurs
et n'engagent pas les institutions dont ils dépendent.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

LES ÉPREUVES CANTONALES DE RÉFÉRENCE

Au cours de leur scolarité obligatoire, les élèves vaudois sont soumis à un nombre de plus en plus grand d'évaluations externes. Jusqu'en 2004, des épreuves cantonales de référence (ECR) en français et en mathématiques étaient régulièrement organisées au début de la 5e année, correspondant au passage du deuxième cycle primaire au cycle de transition (CYT), et en 6e année. En complément des évaluations assurées par les enseignants, les résultats de la première devraient contribuer à l'évaluation diagnostique des élèves et ceux de la seconde à fournir des repères dans le processus d'orientation.

Le Département de la formation, de la jeunesse et de la culture (DFJC) a tenu, dans le cadre des modifications apportées à la loi scolaire, à organiser des épreuves cantonales de référence dès le début de la scolarité (art. 9a de la Loi scolaire du 15 juin 2004). Tout en conservant les deux sessions d'épreuves du CYT6, la mise en œuvre de ces modifications l'a amené à :

- déplacer les épreuves de 5e en fin de 2e cycle primaire (4e année) dès l'année scolaire 2005 — 2006,
- introduire des épreuves de référence de lecture en fin de 2e année dès 2005-2006,
- introduire des épreuves de référence en français et en mathématiques en fin de 8e année dès le printemps 2007.

Les épreuves portent sur les objectifs fondamentaux du Plan d'Études Vaudois (PEV). Elles ont plusieurs fonctions :

- fournir des repères extérieurs à la classe permettant aux enseignants de situer la progression des élèves,
- harmoniser les exigences de l'enseignement dans le canton en vue d'assurer une égalité de traitement entre les élèves,
- contribuer à la qualité du système scolaire.

La Direction Pédagogique (DP - DGEO) conçoit et organise les épreuves en collaboration avec des enseignants. Avant le début de l'année scolaire, elle communique les dates de passation retenues et les objectifs évalués aux directions et, par elles, aux enseignants concernés. Une première version est pré-testée avant d'être validée comme version définitive.

Les établissements sont chargés de la passation des épreuves et de leur correction. La DP transmet aux enseignants les consignes de passation et de correction, et établit le barème. Elle leur suggère une correction en équipe de manière à favoriser l'égalité de traitement. C'est le maître de la discipline concernée qui corrige l'épreuve de ses propres élèves.

Les points attribués pour chaque compétence spécifique vérifiée permettent de situer les performances des élèves par rapport aux compétences visées dans le PEV. Les scores mettent en évidence les forces et les difficultés de ceux-ci et aident l'enseignant à adapter son enseignement aux besoins de l'élève pour poursuivre les apprentissages.

Les résultats sont communiqués aux élèves et à leurs parents. Il importe que l'élève puisse situer ses performances par rapport à ses résultats précédents, voire à la volée de référence, en sachant que tous n'acquièrent pas toutes les connaissances et compétences dans le même laps de temps. Ce bilan n'entre pas dans le calcul de la moyenne ; il est pris en considération à titre indicatif complémentaire seulement dans les procédures de promotion, d'orientation et de certification.

QUESTIONS DE RECHERCHE

Les résultats des élèves aux épreuves de référence représentent d'importantes sources de renseignement à l'échelle du canton. L'objectif de la présente étude est d'analyser les données pour avoir une meilleure connaissance des performances des élèves, tenter d'expliquer les différents niveaux d'acquisition des objectifs fondamentaux en regard du plan d'études et porter un jugement sur leur degré de maîtrise à un certain moment dans l'année scolaire.

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'un mandat de recherche ayant pour but d'être mieux informé sur les résultats du système d'enseignement. Il concerne l'évaluation des compétences des élèves de 6^{e} année en mathématiques. Une enquête ayant pour objet les compétences des élèves de 6^{e} en français paraît simultanément.

L'apprentissage axé sur l'acquisition de compétences induit une évaluation des compétences, c'est-à-dire une évaluation exigeant l'attribution de sens aux tâches à réaliser, permettant d'observer l'habileté de l'élève à s'investir dans la situation et à mettre en œuvre des connaissances acquises. L'évaluation cantonale porte sur des compétences *générales*[1]. Dans notre étude, nous établirons des critères d'évaluation portant sur des compétences spécifiques[2], ou des distinctions plus fines pour observer les effets de la compétence et chercher à vérifier l'atteinte des objectifs du programme. Nous avons emprunté à Bernard Rey (2007) les termes de *compétences générales* et de *compétences spécifiques* alors que le PEV utilise les termes de *compétences visées* et *associées*.

La question est d'abord de savoir quelles sont les compétences évaluées selon le PEV. L'approche par compétences étant plutôt globale, la résolution du problème

---

[1] Leur acquisition nécessite l'établissement de liens entre divers apprentissages (savoirs et capacités à les mobiliser pour répondre à la situation).

[2] Les compétences spécifiques sont une explicitation des compétences *générales*. Elles précisent et délimitent les apprentissages des élèves.

peut concerner des paliers de compétences différents ou d'autres compétences que celles explicitées dans le PEV.

Nous nous demanderons ensuite dans quelle mesure les objectifs fondamentaux[3] sont atteints. Nous cernerons à quel niveau se situent les difficultés des élèves (contextualisation du problème, contenu mathématique, domaine évalué, temps d'apprentissage, ...) et analyserons leur réussite pour rendre compte de ce qu'ils sont capables de faire.

Nous nous interrogerons sur le pourcentage de réussite relatif à chaque compétence. Sur cette base de données, quels apprentissages l'ECR a-t-elle permis de vérifier ? Le résultat donne-t-il une information sur le degré d'acquisition de la notion par rapport au temps d'apprentissage ? Rappelons que le PEV distingue trois temps : temps de sensibilisation, temps d'apprentissage (construction et consolidation), temps de mobilisation. Toutes les compétences visées ne doivent pas obligatoirement être maîtrisées au moment de l'évaluation. Si les tâches organisées en classe concernent des notions en période d'apprentissage, alors les réponses risquent d'être plus diverses.

Enfin, nous nous demanderons si l'épreuve cantonale évalue de la bonne manière les compétences des élèves pour témoigner de la maîtrise des objectifs. Quelles caractéristiques de l'épreuve peuvent influencer les résultats ? A quel bilan des connaissances parvient-on dans le cas d'un élève qui applique difficilement des savoirs dans des situations variées ? L'aptitude des élèves en lecture peut-elle agir sur la réussite ?

[3] L'objectif fondamental est une *compétence générale* du programme explicitée par des *compétences spécifiques* choisies dans le programme.

1. MÉTHODE

L'ECR en question est celle passée en mars 2006 par les élèves de 6e année. Les copies d'un échantillon aléatoire d'élèves ont été récoltées à cet effet. Nous allons présenter ci-après l'échantillon, l'épreuve ainsi que les outils de récolte de données et d'analyse.

1.1 L'ÉCHANTILLON

6592 élèves vaudois de 6e année ont passé l'épreuve. Un échantillon, ne comprenant ni les élèves de classes ER, ni ceux de classes de développement, a été tiré au sort en trois étapes principales. Dans un premier temps, nous avons attribué un nombre aléatoire aux 72 établissements secondaires ou mixtes du canton, puis trié ces établissements en fonction de l'ordre croissant des nombres aléatoires. Dans un deuxième temps, nous avons extrait les 10 premiers établissements du tri et avons répertorié les codes *classe* relatifs à ces établissements. Enfin, nous avons tiré au sort deux classes par établissement et attribué un code aux 363 élèves de l'échantillon. L'échantillon n'est pas comparable aux résultats cantonaux : les taux de réussite que l'on obtiendra dans l'analyse item par item ne seront pas tout à fait les mêmes que ceux de la population entière.

1.2 L'ÉPREUVE

1.2.1 ORGANISATION

La construction de l'épreuve se réfère aux compétences visées dans le Plan d'Études vaudois (DFJ, 2001) ainsi que dans les Moyens d'enseignement romands de mathématiques (COROME, 2001 ; COROME, 2002).

Cette épreuve est conçue autour du thème d'*Archimède*. Les problèmes[4] évaluent deux objectifs fondamentaux communiqués à l'avance aux enseignants et aux enfants :

- utiliser les outils de calcul géométrique pour résoudre des problèmes,
- résoudre des problèmes avec des nombres écrits en code décimal.

Les compétences générales traitent des domaines numériques et géométriques. L'épreuve comporte 9 problèmes visant chacun une ou plusieurs compétences spécifiques du plan d'études, comme le montre le tableau 1. Un problème comprend

---

4 *Problème* est donc pris ici dans le sens de *situation mathématique contextualisée à résoudre* (Ex. : La vis sans fin, Les voyages d'Archimède, ...). Il se rapporte à un domaine conceptuel connu des élèves et entraîné en classe. L'énoncé n'induit pas la démarche de résolution. L'élève devra montrer qu'il est capable de mobiliser et combiner diverses connaissances parfois apprises séparément pour réaliser la tâche demandée.

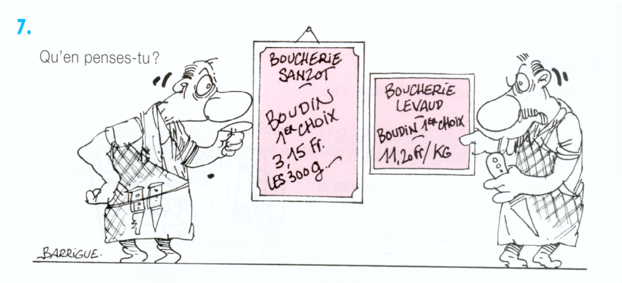
de 1 à 7 items[5] correspondant soit à des notions mathématiques différentes, soit à des stades de l'apprentissage d'une même notion ou concept.

La numérotation des problèmes respecte l'ordre dans lequel ceux-ci sont présentés dans le cahier d'évaluation. Pour faciliter la lecture du document, un mot évocateur, écrit entre parenthèses, illustre chacun de ces problèmes.

	PROBLÈME	*MOT ÉVOCATEUR*
1.	La vis sans fin	*Age*
2.	Les voyages d'Archimède	*Angle*
3.	Eurêka	*Carrelage*
4.	Les solides d'Archimède	*Solide*
5.	Les catapultes	*Chargement*
6.	Les Îles Éoliennes	*Graphique*
7.	Au marché	*Poisson*
8.	La salade grecque	*Recette*
9.	Les galères	*Galère*

Face aux problèmes 2 — 6 — 7 — 8, les élèves sont confrontés à des tâches qui ont peut-être été entraînées en classe par des exercices plus ou moins semblables aux moyens mathématiques CYT6 pendant les phases d'apprentissage.

Exemple : Problème tiré des moyens officiels[6] Problème tiré de l' ECR (mars 2006)



Archimède a prévu de recevoir quelques amis pour le souper.

Chez le poissonnier, il veut acheter le poisson le moins cher.
Calcule le prix d'un kg pour chaque poisson; 1kg correspond à 1000 g.
Filet d'espadon : 11,20 francs les 200 grammes
Filet de thon : 17,50 francs les 250 grammes
Sole entière : 21,15 francs les 300 grammes

L'exemple ci-dessus illustre une tâche de l'ECR qui peut être familière[7] aux élèves.

Les problèmes 1 - 3 - 4 - 5 - 9 proposent aux élèves des tâches nouvelles qui impliquent le choix de la procédure et des calculs à effectuer.

---

[5] Un *item* correspond à chaque réponse attendue d'un problème. Dans le but d'affiner l'analyse, il peut arriver qu'un item implique plus d'un aspect.

[6] Chastellain, M., Calame, J.-A., Dreyer, N. & Foggiato, R. (2002). *Mathématiques sixième année.* Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement.

[7] Voir « Caractéristiques de l'énoncé » pp 67 à 70

1.2.2 CONTENU MATHÉMATIQUE

En référence au PEV

La formulation des problèmes impliquant de mettre en œuvre plusieurs compétences pour pouvoir le résoudre entièrement, nous avons établi le tableau des compétences sur la base du PEV, et réparti les problèmes[8] dans le tableau 1. Nous avons ensuite répertorié les contenus ou connaissances en jeu dans la situation.

Tous les thèmes des moyens romands, sauf celui consacré aux *isométries,* sont touchés par ces 9 problèmes. Les situations relatives au champ multiplicatif concernent implicitement le thème des multiples et diviseurs.

En référence à notre étude

Comme le montre le tableau 1, (p. 11) la résolution d'un problème peut viser des compétences numériques, géométriques ou les deux. Il va de soi qu'une opération est nécessaire aussi bien dans le domaine *des mesures* pour calculer des *aires* que dans celui *des applications*. Ainsi, tous les problèmes exigeant une opération sont aussi répertoriés dans la résolution de problèmes additifs et multiplicatifs dans le tableau 1.

Les contenus et champs conceptuels mathématiques évalués dans ces situations se répartissent en trois groupes que nous appellerons par la suite *domaines* : problèmes additifs et multiplicatifs, applications, géométrie et mesures.

Dans notre étude, nous avons choisi de classer chaque problème dans le domaine qui le caractérise le mieux, selon le but à atteindre ou selon la compétence spécifique la plus prégnante du problème (tableau 2, p. 12). Le nombre d'items relatifs à chaque problème est mentionné entre parenthèses.

---

8 Un problème est désigné par un mot évocateur.

Tableau 1 : Répartition des problèmes dans le tableau de compétences

Compétence générale	Compétence spécifique	Problème	Contenus/ connaissances
S'approprier le problème	Dénombrer une collection et en exprimer la quantité	*Carrelage*	aspect cardinal
Traiter le problème	Choisir l'opération adéquate	*Age* ; *Galère*	champ additif
Communiquer des démarches	Choisir l'opération adéquate	*Carrelage* ; *Solide* ; *Chargement* ; *Poisson* ; *Galère ; Recette*	champ multiplicatif
Résoudre des problèmes numériques	Soustraire des nombres naturels avec efficacité	*Age*	soustraction
	Additionner des nombres naturels	*Galère* ; *Recette*	addition
	Multiplier des nombres naturels	*Carrelage* ; *Chargement* ; *Recette* ; *Galère*	multiplication
	Multiplier avec des nombres décimaux	*Solide* ; *Poisson* ; *Recette*	multiplication
	Diviser des nombres naturels	*Chargement* ; *Recette* ; *Galère*	division euclidienne
	Diviser des nombres décimaux	*Poisson* ; *Recette*	division
Représenter des situations de la vie courante	Lire des représentations graphiques	*Graphique*	graphique
	Résoudre des situations de linéarité	*Recette*	propriétés de la somme et du produit, tableaux de correspondance
Utiliser la mesure pour comparer des grandeurs	Mesurer des angles à l'aide du rapporteur	*Angle*	angle, degrés
	Calculer des aires	*Carrelage* ; *Solide*	aire du rectangle
	Établir des correspon-dances entre les unités	*Carrelage*	cm 2 ↔ m2
	Calculer des longueurs	*Solide*	1/2 périmètre
Structurer le plan et l'espace	Observer le développement d'une surface et la construction du solide correspondant pour en déceler les propriétés	*Solide*	arêtes

Tableau 2 : Répartition des problèmes selon les domaines

DOMAINE	PROBLÈME	MOT ÉVOCATEUR
Problèmes additifs et multiplicatifs	1. La vis sans fin (1 item)	*Age*
	5. Les catapultes (1 item)	*Chargement*
	9. Les galères (2 items)	*Galère*
Applications : relations entre les nombres	6. Les Îles Éoliennes (7 items)	*Graphique*
	7. Au marché (3 items)	*Poisson*
	8. La salade grecque (6 items)	*Recette*
Géométrie et mesures	2. Les voyages d'Archimède (3 items)	*Angle*
	3. Eurêka (3 items)	*Carrelage*
	4. Les solides d'Archimède (2 items)	*Solide*

Les savoirs et savoir-faire liés à chaque domaine sont :

1°. Problèmes additifs et multiplicatifs : nombres et opérations

La capacité de l'élève à interpréter des données numériques et à utiliser des nombres rationnels (notation : Q) pour résoudre des problèmes additifs et multiplicatifs. Outre la compréhension de l'énoncé et le choix de l'opération adéquate, l'élève doit être capable d'additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres entiers.

2°. Applications : relations entre les nombres

La capacité de l'élève à percevoir le caractère fonctionnel d'une situation de linéarité et la résoudre soit par l'utilisation des propriétés de linéarité, soit par une procédure algorithmique. La capacité à lire des données d'une représentation graphique par le décodage de points et par la représentation de déplacements.

3°. Géométrie et mesures

La capacité de l'élève à utiliser les outils du calcul géométrique pour déterminer la mesure de longueurs et d'angles, à calculer le périmètre et l'aire d'un polygone et d'exprimer ces mesures à l'aide des unités conventionnelles. Les nombres sont pris dans l'ensemble Q.

1.3 L'ANALYSE

L'évaluation de la capacité des élèves à résoudre un problème est une manière de déterminer dans quelle mesure ils sont capables de :

- s'approprier l'énoncé à caractère mathématique pour se représenter le but à atteindre,
- prélever les informations nécessaires, faire appel aux notions ou concepts en jeu, et les utiliser judicieusement pour traiter le problème et communiquer les résultats.

Nous avons pris ces éléments en compte pour organiser l'analyse qualitative des résultats. Nous avons analysé les copies des élèves au niveau des items d'abord, des problèmes ensuite.

Au niveau des items, nous analyserons deux aspects : les procédures et les résultats des élèves. La procédure adoptée nous renseigne sur la nature des éléments qui bloquent les élèves face à la tâche. Elle permet de déterminer dans quelle mesure les compétences évaluées dans ces tâches sont acquises ou pas. L'explicitation des opérations effectuées est intéressante, car elle est révélatrice de la manière dont les élèves organisent leur tâche, de ce qu'ils sont capables de faire et/ou de leurs difficultés.

Pour chaque problème, nous attribuerons trois codes et communiquerons le taux de réussite aux items ou aux différents aspects d'un item :

1 réponse attendue ou étapes correctes de la résolution du problème,

0 réponse ou démarche fausse,

NR absence de réponse.

Concernant les problèmes qui ne comptabilisent qu'un item, nous attribuerons le code 1 à celui qui est parvenu à mener à bien la résolution de tout le problème. Le code 0 signifie soit que la résolution n'est que partiellement ou pas du tout correcte, soit que l'élève ne résout pas la situation.

À la fin de l'analyse de chaque problème, nous présenterons la distribution du score total, soit le nombre d'items réussis. Enfin, ce score total et le pourcentage de réussite nous permettront de déterminer les domaines les mieux réussis. Toutefois, nous savons que les élèves en difficulté peuvent avoir plus de peine à aborder des problèmes contextualisés. Par conséquent, nous ne pourrons pas définir si c'est la compréhension de la tâche pour mettre en œuvre les opérations adéquates ou la maîtrise de la notion évaluée qui cause problème.

Les résultats *item par item* permettent de percevoir avec précision le niveau d'accomplissement des diverses connaissances apprises, alors que la distribution du score total à un problème renseigne sur le pourcentage d'élèves capables de traiter avec succès toutes les étapes successives d'un problème et de communiquer la réponse finale.

1.4 LIMITES

Plusieurs types de décisions peuvent être prises sur la base des résultats à l'épreuve cantonale. L'épreuve constitue à la fois une aide pour prendre des décisions de régulation, d'orientation, et une aide pour harmoniser les exigences de l'enseignement et pour contribuer à la qualité du système scolaire. Si on retrouve ici la double finalité des épreuves externes, la récolte de nos données ne nous permet ni de connaître leur impact sur les pratiques professionnelles des enseignants ni sur l'orientation des élèves. Une autre recherche tentera de relever ce défi.

2. ANALYSE DES PROBLÈMES ET DES RÉSULTATS

Dans ce chapitre, nous décrivons les compétences visées par chaque problème. Un problème comportant de 1 à 7 items, nous analysons les données d'abord item par item. Nous rassemblons ensuite les résultats que nous présentons par problème dans un premier temps, puis par domaine dans un deuxième temps. Enfin, pour chaque domaine, nous commentons les notions évaluées par rapport au temps d'apprentissage pour tenter d'éclaircir les différents degrés d'atteinte des objectifs décrits dans le plan d'études. Les problèmes ne sont pas traités dans l'ordre dans lequel ils sont présentés aux élèves.

2.1 PROBLÈMES ADDITIFS ET MULTIPLICATIFS : OPÉRATIONS AVEC DES NOMBRES ENTIERS

Trois problèmes comportant des données numériques nécessitent une bonne connaissance des nombres entiers et des opérations : 2.1.1 *La vis sans fin*, 2.1.2 *Les catapultes*, 2.1.3 *Les galères*.

2.1.1 LA VIS SANS FIN

La tâche

À quel âge Archimède a-t-il inventé la vis sans fin ?

Archimède est né en 287 av. J.-C. à Syracuse en Sicile.

Il est mort, assassiné par un soldat romain, en 212 av. J.-C.

En 239 av. J.-C, il invente la vis sans fin qui permet de remonter de l'eau souterraine à la surface du sol.

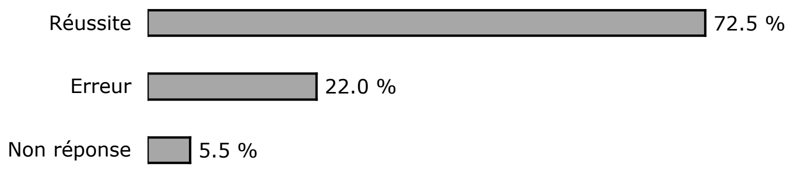
Pour résoudre le problème numérique *La vis sans fin,* l'élève doit reconnaître qu'il s'agit d'un problème soustractif et le traiter correctement avec des nombres entiers relatifs.

Réponse :

Archimède a inventé la vis sans fin à l'âge de **48 ans**

Les résultats

Taux de réussite au problème *La vis sans fin* (pourcentage) : 72.5 %



82.7 % des élèves choisissent l'opération ou les opérations qui mènent à la solution. Celle-ci est exacte pour 72.5 % des élèves évalués.

La procédure la plus fréquente est le calcul en colonnes *287 – 239 = 48*. D'autres démarches pertinentes, équivalentes à la soustraction, apparaissent. Voici quelques exemples observés, écrits en ligne ou en colonnes sur les copies d'élèves :

- 287 – 212 = 75 ; 239 – 212 = 27 ; *75 – 27* = **. . .**
- *239* + **. . .** = *287*
- *287* — **. . .** = *239*

Selon la démarche de résolution adoptée, l'énoncé comprend une information superflue pour résoudre le problème. La difficulté est de poser la bonne opération en sachant que *287 avant J-C* est un nombre plus petit que *239 av J-C* qui est lui-même plus petit que *212 av J-C*.

La maîtrise de l'algorithme mise à part, nous avons répertorié des erreurs sur deux plans : la pose du calcul et le choix des données. Les élèves :

- représentent la situation par les calculs *287 – 212 = 75 ; 75 – 239*,
- écrivent le calcul numérique *239 – 287*,
- citent un nombre de la donnée comme réponse,
- calculent la durée de vie d'Archimède (75 ans),
- calculent le nombre d'années passées de l'invention de la vis sans fin à la mort de Archimède (27 ans).

Du point de vue du calcul technique, 84.3 % des élèves parviennent à exécuter correctement l'opération ou les opérations qu'ils posent. Les erreurs de calcul (9.1 %) concernent particulièrement le répertoire soustractif, les retenues ou le calcul de la différence en simplifiant l'opération comme *289 – 37* au lieu de *287 – 39*.

Ce problème qui consiste à rechercher la différence entre deux nombres de la donnée est le mieux réussi de ce domaine.

2.1.2 LES CATAPULTES

La tâche

Archimède mit au point une série de catapultes pendant le siège de Syracuse, afin de défendre sa ville attaquée par les Romains.

Les grandes catapultes peuvent être chargées de 18 pierres.

Les petites catapultes peuvent être chargées de 13 pierres.

Les soldats utilisèrent uniquement des grandes catapultes qui fonctionnèrent 234 fois.

Combien de fois les soldats de Syracuse auraient-ils dû faire fonctionner les petites catapultes pour envoyer le même nombre de pierres ?

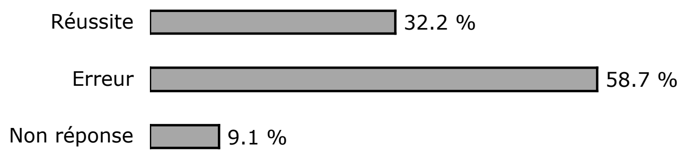
Pour traiter le problème numérique *Les catapultes,* l'élève doit être capable de choisir les données nécessaires à la résolution, les mettre en relation, déterminer deux opérations arithmétiques (une multiplication et une division) ou décrire une procédure équivalente et effectuer les calculs. Il doit maîtriser la technique de la division et de la multiplication dans IN.

Réponse :

Ils auraient dû faire fonctionner les petites catapultes **324 fois**.

Les résultats

Taux de réussite au problème *Les catapultes* (pourcentage) : 32.2 %



62.8 % des élèves évalués posent la multiplication *234 x 18* ou une démarche correspondante correcte pour rechercher le nombre de pierres chargées afin de faire fonctionner les catapultes 234 fois. 47.9 % des élèves de l'échantillon enchaînent avec le 2^{e} calcul. Ils écrivent la division *4212 : 13* ou évoquent une démarche correspondante pour rechercher le nombre de fois que les soldats auraient dû faire fonctionner les petites catapultes. 15 % des élèves au total posent correctement la première opération mais pas la seconde. Ces résultats montrent qu'ils sont plus nombreux à traiter la première étape de la résolution du problème (une multiplication ou une procédure correspondante) que la deuxième transformation (une division).

La procédure décrite au paragraphe précédent est la plus courante. Des élèves développent une autre combinaison des opérations :

> 234 x (18 – 13) = 1170
> 1170 : 13 = 90
> 90 + 234 = 324

Ils multiplient 234 par la différence entre les pierres chargées par les grandes et les petites catapultes pour trouver le nombre total de pierres envoyées en plus, puis le nombre de fois que les soldats auraient dû faire fonctionner les petites catapultes en plus. Ils effectuent ensuite la somme des deux termes 90 et 324 pour obtenir le résultat final.

Du côté de la maîtrise de la technique des opérations, environ 80 % des élèves ayant posé correctement un calcul ou l'autre obtiennent un résultat exact. En revanche, parmi ceux qui posent un calcul autre que celui attendu, mais avec des nombres de la donnée, un tiers d'entre eux seulement ont une réponse correcte. Les traces écrites permettent de déterminer l'obstacle. Les variantes tirées de copies d'élèves témoignent des problèmes que posent encore technique et compréhension du système de numération pour des élèves. Dans ces exemples (p. 19), les erreurs sont mises en évidence par un trait double de chaque chiffre en question.

Les erreurs qui reviennent le plus souvent concernent la maîtrise des répertoires multiplicatifs et soustractifs, la gestion des retenues, ainsi que la taille du reste par rapport au diviseur.

Beaucoup d'élèves n'ont pas réussi ce problème qui implique l'usage de deux opérations successives (multiplication et division) qu'ils doivent choisir à bon escient. La situation se résume par le calcul arithmétique *... x 13 = 234 x 18*. Le problème est beaucoup plus difficile que le précédent. On suggère une différence (18 ≠ 13) et une transformation. Il faut anticiper un 1er traitement puis un second qui porte sur le résultat du premier, tout cela pour identifier une transformation qui n'a pas été effectuée .

Exemples :

3042	18
18	1681
124	
108	
162	
144	
18	
18	
0	

Le reste est égal au diviseur. Par soustractions successives, l'élève peut prendre conscience que le partage de *162* concerne les unités de même que *8 et 1* au quotient se rapportent au chiffre des unités.

234	13
13	1799
104	
91	
130	
117	
130	
117	
13	

Le reste de la division de *234* par *13* est égal au diviseur. L'élève poursuit la division dans l'ensemble des nombres décimaux sans faire usage de la virgule au quotient.

Ci-dessous, la division de 234 par 13 est effectuée par la méthode d'une manipulation lacunaire, à savoir 234 = 18 x 13

13
x 13
39
130
169
+ 13
182
+ 13
195
+ 13
208
+ 13
221
+ 13
234

Pour trouver 18, l'élève effectue une 1ère multiplication dont le produit se trouve relativement éloigné de 234. Il va essayer de s'en approcher par additions successives. La notation choisie par l'élève n'est mathématiquement pas correcte.

100	90
x 13	x 13
300	270
1000	900
1300	1170

Réponse :
Il aurait dû envoyer
90 fois plus

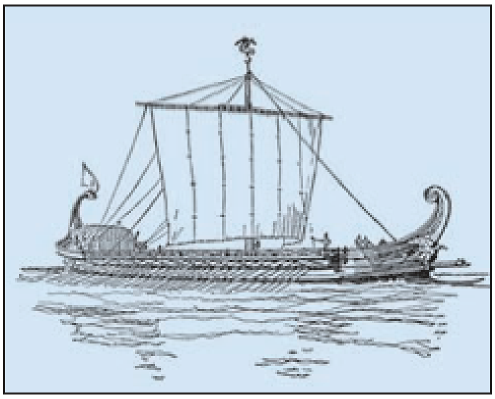
L'élève divise 1170 par 13 par essais - erreurs

Il pose une 1ère multiplication dont le produit est plus grand que 1170. Il essaie une 2e multiplication avec un facteur inférieur. Le produit correspond à 1170.

2.1.3 Les galères

La tâche

Caractéristiques d'une galère	
Longueur	*40 m*
Largeur	*6 m*
Rames	*57*
Longueur des rames	*4,50 m*
Rameurs	*171*
Marins	*30*
Soldats	*18*



Une galère romaine

a) 21 galères firent le siège de Syracuse.

Calcule le nombre de personnes déplacées au total sur ces galères.

b) Pour une galère, calcule le nombre de rameurs par rame.

Pour le problème numérique *Les galères*, les élèves doivent satisfaire deux demandes. La procédure choisie et la réponse à la partie *a* n'ont aucune incidence pour aborder la partie b du problème.

Réponses :

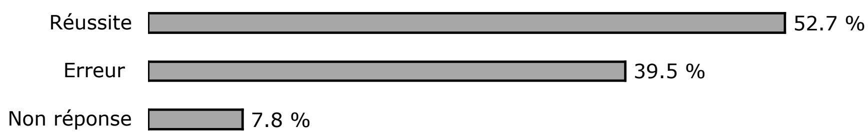
a) **4599 personnes** au total se déplacent sur ces galères.

b) Il y a **3 rameurs** par rame

Les résultats

Partie a du problème « Les galères »

Item 1 :



Les résultats de six élèves sont manquants pour cet item.

52.7 % des élèves évalués recherchent correctement le nombre total de personnes déplacées sur les galères et effectuent les calculs avec exactitude (addition des personnes puis multiplication en fonction des galères).

66.9 % reconnaissent les deux concepts en jeu, l'addition et la multiplication et développent une procédure pertinente. Deux procédures sont correctes selon que leur choix est de calculer d'abord le nombre de personnes déplacées sur une galère, puis sur les 21 (procédure 1), ou le nombre de personnes par catégorie sur les 21 galères puis d'additionner les produits obtenus (procédure 2).

- Procédure 1 : 170 + 30 + 18 = 219 ; 219 x 21 = 4599
- Procédure 2 : (170 x 21) + (30 x 21) + (18 x 21) = 4599

Trois autres démarches observées mettent en évidence la manière dont les élèves s'approprient l'énoncé :

- Ils posent et calculent seulement l'addition permettant de trouver le nombre total de personnes sur une galère.

- Ils recherchent le nombre de personnes d'une ou deux catégories qui se déplacent sur les 21 galères. Ils reconnaissent qu'il s'agit d'une multiplication par 21 mais occultent le mot *total* de la consigne.

- Ils effectuent des opérations avec des nombres non pertinents. Ils choisissent par exemple de multiplier par 21 chaque nombre du tableau y compris le nombre de rames ou les mesures de longueur et de largeur, ou calculent la somme de tous les nombres cités dans l'énoncé.

Au niveau technique des opérations, 78.7 % des élèves développent une procédure correcte et obtiennent un résultat exact aux calculs posés. Aucune erreur n'est à relever au plan des résultats de la table de multiplication (x2).

Les difficultés observées se situent au niveau de la gestion des *retenues* (exemple 1), du décalage qui correspond à la multiplication par 20 dans x 21 (exemple 2), ou des deux (exemple 3).

Exemple 1

$$\begin{array}{r} 171 \\ \times \quad 21 \\ \hline 171 \\ 2420 \\ \hline 2591 \end{array}$$

Exemple 2

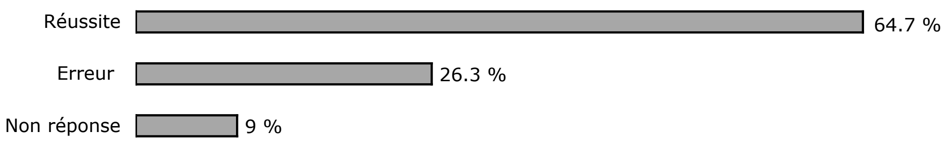
$$\begin{array}{r} 48 \\ \times\ 21 \\ \hline 48 \\ 96 \\ \hline 144 \end{array}$$

Exemple 3

$$\begin{array}{r} 171 \\ \times \quad 21 \\ \hline 171 \\ 242 \\ \hline 413 \end{array}$$

Partie b du problème « Les galères »

Item 2 :



Comme pour l'item précédent, les résultats de six élèves sont manquants.

Une seule opération suffit pour résoudre la 2e partie de ce problème (la division exacte de 171 par 57 ou une démarche équivalente). Le problème est réussi par 64.7 % des élèves.

67.8 % des élèves ont une démarche de résolution correcte. Ils ont soit calculé le quotient de *171 et 57*, soit posé en colonnes la multiplication lacunaire *57 x … = 171*.

9.6 % multiplient le nombre de rames par 2, ou par le nombre de rameurs par galère, ou encore écrivent qu'il faut 57 rameurs pour 57 rames.

13.7 % ne choisissent pas les nombres adéquats pour poser la division ou choisissent les bons nombres mais pas l'opération correcte.

Exemples : 57 : 30 =
171 : 4,5 =
171 x 57 =
57 – 171 =

9 % n'entrent pas dans la situation et ne laissent aucune trace de procédure.

3.1 % des élèves évalués posent le calcul exact et font des erreurs de calcul ou d'interprétation des résultats.

Exemples :

$$\begin{array}{r|l} 1\ 7\ 1 & 5\ 7 \\ \cline{2-2} -\ 1\ 7\ 1 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Réponses observées :
- Un rameur avait 3 rames.
- Il y a 171 rameurs par rame.

$$\begin{array}{r|l} 1\ 7\ 1 & 5\ 7 \\ \cline{2-2} +\ 1\ 7\ 1 & 3 \\ \cline{1-1} 3\ 4\ 2 & \end{array}$$

Réponse :
Il y a 342 rameurs

Les exemples de procédures et les réponses observées ci-dessus montrent que des élèves ont des difficultés à se représenter la situation. Pris par le calcul, ils ne parviennent peut-être plus à retrouver le sens du résultat par rapport à leur représentation initiale.

Dans quelques copies, la réponse au calcul est un nombre décimal (0.3 ; 1.9 ; 3.17 ; 3.3 ; 26.411) alors qu'on cherche un nombre de personnes. Il arrive même que des élèves arrondissent au nombre entier supérieur certainement par référence à l'estimation d'un résultat.

L'ensemble du problème

Tableau 3 : Distribution du score total aux 2 items du problème « Les galères »

	Score total			
	0	1	2	Tot
% d' élèves	23.2	36.1	40.6	100

Pour rappel, le score total renseigne sur le pourcentage d'élèves ayant répondu correctement aux deux items du problème (2), à l'un des deux items (1), à aucun des deux items (0). Le score 0 ne fait pas la distinction entre les absences de réponse à l'item et les erreurs. Ainsi 23.2 % des élèves ont un score total de 0 point. Parmi eux, 5.9 % ne répondent pas du tout aux deux items du problème et 17.3 % ont des erreurs dans les 2 items.

Le taux de réussite moyen aux 2 items du problème *Les galères* est de 58.7 %.

2.1.4 COMMENTAIRES

Compétences des élèves

Contenus / connaissances :

Les problèmes *La vis sans fin, Les catapultes et Les galères* sont des problèmes simples parce qu'aucune connaissance autre que les outils des champs additif et multiplicatif ne sont nécessaires. Le problème *La vis sans fin* est le plus simple étant donné qu'il ne requiert qu'une seule étape de résolution. Il est le mieux réussi des trois problèmes de ce domaine.

Environ trois quarts des élèves savent résoudre un problème additif (addition ou soustraction). Pour ceux qui n'ont pas entièrement réussi, l'analyse des procédures a montré que la difficulté est liée soit à l'énoncé, en particulier à la représentation que l'élève a des nombres situés dans l'ensemble Z (… avant Jésus-Christ), soit au degré de maîtrise de la technique de la soustraction.

Plus de la moitié des élèves usent de la multiplication avec succès. La taille du multiplicateur (18 et 21) suscite spontanément le recours au calcul en colonnes.

La division est mieux réussie dans le problème *Les galères* (64.7 %) que dans celui *Des catapultes* (39.4 %) bien qu'il s'agisse d'une division de nombres naturels dans les deux cas, le quotient étant un nombre naturel aussi. Curieusement, les élèves sont plus nombreux à trouver le résultat exact à la division par 57 qu'à la division par 13. Comme pour la multiplication, la taille des nombres peut jouer un rôle dans la réussite d'une opération ou dans le choix d'un outil pour opérer sur les nombres. La taille du dividende étant faible, le travail d'estimation du résultat effectué par l'élève aide à cerner le quotient. L'utilisation de soustractions successives du diviseur est aussi à leur portée.

Interprétations

Les problèmes *Les catapultes* et *Les galères* offrent un regard non seulement sur la maîtrise de l'algorithme de l'addition, de la multiplication et de la division, mais aussi sur la représentation que l'élève a de l'énoncé et des éléments qui *habillent* la tâche, et de sa compréhension des calculs posés.

Concernant l'*habillage de la tâche*, la procédure de résolution pour le problème *Les galères* peut dépendre de l'aptitude de l'élève à tenir compte de tous les éléments de la consigne, de sa capacité à trier les informations numériques de la donnée (*171 rameurs et 57 rames sur une galère*) et de sa représentation de la galère romaine (57 rames et plus d'un rameur par rame). Concernant la compréhension des concepts additif et multiplicatif, les procédures observées révèlent la difficulté qu'ont certains élèves à faire le lien entre les nombres de la donnée et l'écriture chiffrée. Ils calculent la somme ou le quotient de nombres non pertinents dans la situation, comme la longueur et la largeur d'une galère pour rechercher le nombre de personnes qui se déplacent sur ces galères.

Dans *Les catapultes* et dans *Les galères,* la difficulté pour certains élèves est d'interpréter les résultats d'une opération. Par exemple, une fois la division posée et réalisée correctement, ils ne savent pas si la réponse attendue correspond au quotient ou au reste. La procédure adoptée peut rendre aussi la tâche plus ou moins complexe. Le quotient de la division 1170 par 13 renseigne sur le nombre de fois que les soldats auraient dû faire fonctionner les petites catapultes en plus des 234 fois alors que le quotient de la division 4212 par 13 met directement en évidence la réponse cherchée.

Le taux de réussite moyen aux 3 problèmes additifs et multiplicatifs est de 54.4 %.

Notions évaluées par rapport au temps prévu pour l'apprentissage

À son entrée au CYT, l'élève sait utiliser des algorithmes ou organiser une démarche qui mène au résultat pour additionner, soustraire et multiplier des nombres naturels jusqu'à 10 000. Les algorithmes de calcul et les répertoires mémorisés sont repris en 5e et poursuivis en 6e dans un nouveau milieu numérique, les nombres rationnels, en particulier les nombres décimaux.

Le problème *La vis sans fin* est en adéquation avec le Plan d'Études Vaudois (PEV). Relevons toutefois que la référence aux nombres entiers relatifs pour des dates antérieures à notre ère est encore peu connue des élèves. Ceux-ci ont utilisé ce concept principalement pour le codage et le décodage de points du plan, dans un système d'axes.

Le concept de la multiplication et l'algorithme qui y correspond sont construits et entraînés au primaire. L'étude se poursuit au CYT dans l'ensemble des nombres décimaux. L'aspect algorithmique de la division est développé en 5e (nombres naturels) et 6e année (nombres décimaux), mais les élèves ont résolu antérieurement des situations de partage où ils ont dû rechercher *combien de fois ceci va-t-il dans cela ?* Il s'agit d'une opération en cours d'acquisition et nous pouvons observer des variantes intéressantes dans la disposition des traces écrites tels que la multiplication lacunaire, la division par soustractions successives, des essais de multiplications pour atteindre le nombre le plus proche du dividende.

Si ces problèmes sont adaptés aux élèves de 6e année, les résultats montrent que l'apprentissage des concepts de multiplication et de division, ainsi que le traitement de problèmes multiplicatifs, restent à entraîner.

2.2 APPLICATIONS : RELATIONS ENTRE LES NOMBRES

Dans ce domaine, les élèves sont en présence de grandeurs dépendant l'une de l'autre. Le lien fonctionnel est donné par un graphique (6. *Les Îles Éoliennes*) ou des valeurs numériques (*7. Au marché* et *8. La salade grecque*).

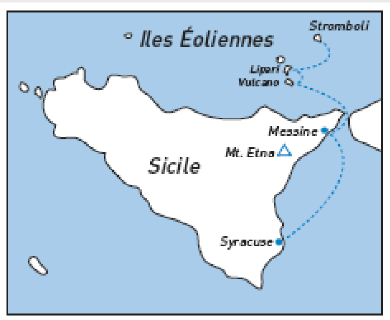
Les énoncés des trois problèmes évoquent des situations proches de la vie courante ou posées dans le cadre de la géographie :

- la position dans l'espace est en relation avec le temps (durée),
- le prix d'une marchandise est fonction de sa masse,
- Une quantité dans une recette de cuisine est fonction du nombre de personnes (comparaison de proportions).

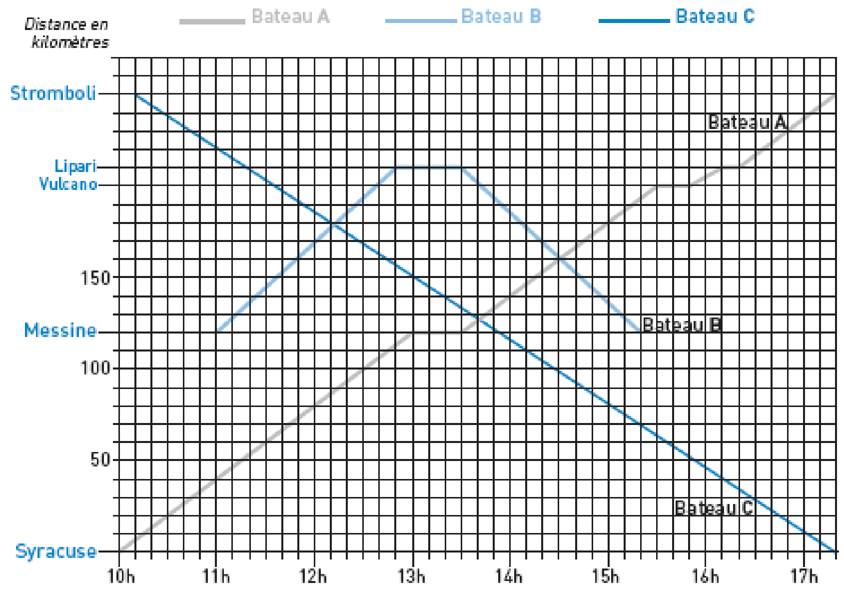
2.2.1 LES ÎLES ÉOLIENNES

La tâche

Aujourd'hui, plusieurs bateaux naviguent entre la Sicile et les Îles Éoliennes (Lipari, Vulcano, Stromboli, ...).



Réponds aux questions en t'aidant du graphique qui représente leur trajet.



1. À quelle heure le bateau A croise-t-il le bateau B ?

2. Quelle distance sépare la ville de Messine de l'île de Vulcano ?

3. Sur l'ensemble de son trajet, quel bateau s'arrête le plus longtemps ?

4. Combien de temps met le bateau B pour relier Messine à Lipari ?

5. À quelle distance de Stromboli les bateaux B et C se croisent-ils ?

6. Quel bateau se trouve, à 13 heures, à environ 30 km de Messine ?

7. D'où part le bateau qui effectue un aller-retour ?

Pour résoudre la situation *Les Îles Éoliennes*, l'élève doit être capable d'observer, analyser et interpréter correctement la représentation graphique donnée afin d'en extraire les éléments pertinents.

Le graphique représente le déplacement de 3 bateaux qui ne partent pas à la même heure du même endroit. L'axe du temps est horizontal, celui des distances vertical. Les représentations des déplacements réels des bateaux sont présentés sous la forme de segments de droites. Chaque bateau se déplace toujours à la même vitesse. Les élèves doivent commencer par interpréter la graduation des axes 1 et 2 pour trouver la valeur de l'unité *temps* et de l'unité *distance*.

Dans le cadre d'une tâche de lecture, l'absence de notation de l'élève ne permet pas de procéder à une analyse des erreurs.

Réponses :

Item 1 : Le bateau A croise le bateau B **à 14 h 30**.

Item 2 : **80 km** séparent la ville de Messine de l'île de Vulcano.

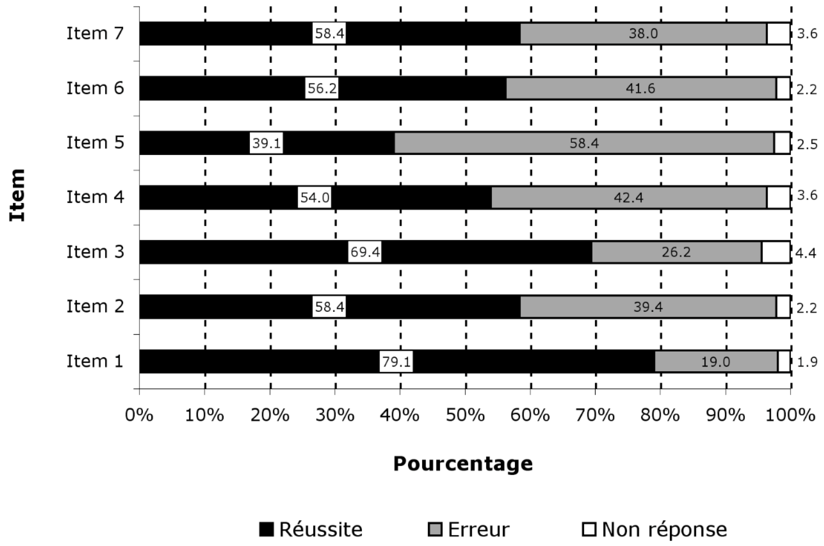
Item 3 : Le **bateau A** s'arrête le plus longtemps sur l'ensemble du trajet.

Item 4 : Le bateau B met **1 h 50** pour relier Messine à Lipari.

Item 5 : Les bateaux B et C se croisent à **71 km (±2)** de Stromboli.

Item 6 : Le **bateau C** se trouve à 13 h. à 30 km de Messine.

Item 7 : Le bateau qui fait un aller et retour part de **Messine**.



Les résultats

Item par item

Certaines situations se révèlent délicates pour les élèves. Les pourcentages de réussite et d'erreurs à chaque item mettent en évidence les conceptions que les élèves ont pour interpréter une représentation graphique de déplacements de bateaux.

Deux items sont réussis par plus de deux tiers des élèves :

- L'item 1 est le mieux réussi des 7 items de ce problème. Il s'agit de mettre en relation sur le graphique le croisement de deux bateaux figuré par l'intersection de segments avec l'heure sur l'axe 1.

- Les élèves ayant répondu correctement à l'item 3 ont su repérer un bateau à l'arrêt par sa représentation : un segment parallèle à l'axe 1 puisque le temps s'écoule et la distance parcourue n'augmente pas. Ils ont aussi pris en compte

« l’ensemble du trajet » en additionnant les différents arrêts (bateau A). Ils ont calculé le temps écoulé par itération de l’unité pour comparer les segments.

Quatre items sont moyennement réussis :

- L’item 2 nécessite de déterminer la taille de l’unité sur l’axe 2 (une unité = 10 km), repérer la position des deux ports donnés sur cet axe et calculer la distance qui les sépare.

- Concernant l’item 7, les élèves doivent interpréter comme un *aller et retour* les deux segments d’inclinaison différente qui représentent le déplacement d’un même bateau et déterminer le lieu de départ sur l’axe 2.

- Sur la représentation graphique, un bateau se trouve à Messine à 13 h. Cette position peut induire en erreur les élèves peu attentifs à la question de l’item 6. Ceux-ci doivent tenir compte de trois informations : le repérage des points qui se situent à 30 km du lieu donné sur l’axe 2, le temps sur l’axe 1 et la représentation graphique du déplacement du bateau passant par l’un de ces deux points.

- Le quatrième item (item 4) porte à la fois sur le repérage du segment qui représente le trajet du bateau sur le graphique, en particulier les points de départ et d’arrivée (axe 2) et sur l’interprétation de l’information au niveau de la durée (axe 1).

Un seul item est réussi par moins de 50 % des élèves :

- La question de l’item 5 demande des approfondissements de la part des élèves. Les obstacles principaux sont d’interpréter un point qui ne se trouve pas juste à l’intersection du quadrillage sur le graphique et de définir la distance qui sépare ce point et un lieu donné. En plus, la graduation de l’axe 2 (en kilomètres) ne va pas au-delà de 150. C’est à l’élève de la compléter pour pouvoir répondre à la question.

L’ensemble du problème

Le taux de réussite moyen aux 7 items est de 59.2 %. Le pourcentage d’absence de réponse observé à chacune des sept questions est indépendant du taux de réussite, sauf pour la question 1 la mieux réussie.

Un point a été attribué à chaque item dont la réponse correspond à celle attendue. Seuls 9.6 % des élèves évalués obtiennent le score total maximum.

Tableau 4 : Distribution du score total au problème « Les Îles Éoliennes »

	Score total								
	0	1	2	3	4	5	6	7	Tot
% d’élèves	3.3	6.3	9.6	13.5	21.5	21.5	14.6	9.6	100

2.2.2 AU MARCHÉ

La tâche

Archimède a prévu de recevoir quelques amis pour le souper.

Chez le poissonnier, il veut acheter le poisson le moins cher.

Calcule le prix d'un kg pour chaque poisson ; 1kg correspond à 1000 g.

Filet d'espadon : 11,20 francs les 200 grammes

Filet de thon : 17,50 francs les 250 grammes

Sole entière : 21,15 francs les 300 grammes

Pour résoudre *Au marché*, l'élève doit reconnaître le facteur par lequel sont multipliés les éléments d'un ensemble donné (les masses) et calculer de manière exacte les opérations qui s'imposent pour obtenir l'image correspondante du second ensemble (prix).

Réponses :

Item 1 : 1 kilo d'espadon coûte **56 fr.**
Item 2 : 1 kilo de filet de thon coûte **70 fr.**
Item 3 : 1 kilo de sole coûte **70,50 fr.**

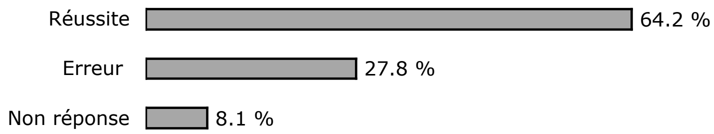
Les résultats

Les résultats de trois élèves sont manquants pour ce problème.

Nous analyserons ici les procédures pour déterminer le sens que l'élève donne à la situation et sa manière de la représenter par des calculs numériques. Les erreurs de calcul ont été développées dans le chapitre 2.1.

Item par item

Item 1 :



Filet d'espadon est l'item le mieux réussi des trois proposés dans cette situation.
A partir des traces observées chez les élèves, on peut distinguer quatre catégories de procédure qui mènent à une réponse correcte :

- l'élève repère le coefficient de proportionnalité 5 et multiplie en colonnes le prix de 200 g par 5 (11,20 x 5 = 56),

- il calcule le prix de 100 g (11,20 : 2 = 5,60), puis celui de 1000 g ou 1 kg (5,60 x 10= 56),

- il effectue en colonnes l'addition itérée 11.20 + 11.20 +11.20 + 11.20 + 11.20, ou

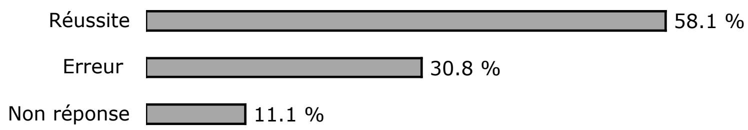
- il recourt à un tableau de correspondances pour identifier le coefficient et le sens de la relation, et calculer le prix du kilo en francs.

Parmi les erreurs de procédure, deux démarches témoignent du type de difficulté qu'ont certains élèves :

- ils recherchent le prix de 100 g (5.60 fr.) et mettent en évidence 5,60 fr, comme étant celui du kg,

- ils calculent une quantité de grammes ou de kilos au lieu d'un prix en francs.

Item 2 :



Cet item est un peu moins bien réussi que le premier. Les élèves déterminent avec succès le coefficient de linéarité (4) et le correspondant de 17.50 (exemple 1). Certains pensent aux liens fonctionnels additifs (exemple 2), d'autres à ceux de type multiplicatif (exemple 3).

Exemple 1

x 4

Quantité (en g)	250	1 000
Prix (en fr.)	17.50	

x 4

Exemple 2

```
  17 . 50     17 . 50     35 . 00
+ 17 . 50   + 17 . 50   + 35 . 00
---------   ---------   ---------
  35 . 00     35 . 00     70 . 00
```

Exemple 3

```
  17 . 50
x       4
---------
  70 . 00
```

Quelques élèves passent par le prix unitaire (: 250) pour trouver le prix du kilo (x 1000).

L'analyse des traces des procédures montre que des élèves ont compris la situation ou une partie de la situation bien que tous les calculs posés ne soient pas corrects :

- ils ont conscience que le poids de 250 g représente le 1/4 de 1000 g mais choisissent de diviser 17.50 par 4 au lieu de multiplier par 4,

- ils établissent la correspondance entre les nombres 250 et 1000 mais déterminent le facteur 2 au lieu de 4,

- ils passent par le prix unitaire de 1 g mais n'établissent pas le bon rapport entre 1 et 1000,

- ils pensent aux liens fonctionnels de type additif et additionnent trois fois le prix pour 250 g, 750 étant le complément à 250 pour atteindre 1000 g.

D'autres erreurs témoignent de la non compréhension de la situation ou de la non maîtrise des notions en jeu bien que les élèves utilisent les nombres de la donnée :

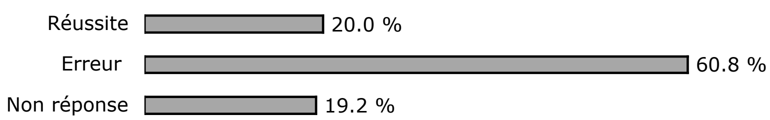
- le produit de 17.50 et 250 ou de 17.50 et 750,

- la soustraction des termes 1000 et 250,

- la transformation de 17.50 francs en 1750 grammes

5.3 % des élèves prévoient avec peine ce que devient une quantité quand elle subit une transformation. Ils parviennent par exemple à un résultat supérieur à 100 fr. pour le prix du kilo de thon ; le prix d'un kilo de thon allant même jusqu'à 13 125 fr.

Item 3 :



Le calcul du prix d'un kilo de *sole* obtient le pourcentage de réussite le plus faible, 20.0 % .

Le quotient approximatif de la division 1000 par 300 oblige l'élève à comparer les grandeurs situées dans deux espaces différents de mesure pour calculer la réponse.

Ceux qui ont réussi l'item 3 de ce problème développent la démarche suivante :

ils cherchent d'abord le prix de 100 grammes et utilisent les propriétés de linéarité qui font intervenir la multiplication (100 x 10) ou la somme (300 + 300 + 300 + 100).

Des élèves ont comparé les grandeurs de l'espace *quantité* et ont opté pour le coefficient 3.333... . Leur démarche est correcte ; ils ne peuvent cependant pas parvenir au résultat exact étant donné que 3.333... est un quotient approché (21.15 x 3.333...). D'autres ont tenté d'approcher 1000 g par l'addition itérée *350 + 350 + 350*.

Deux autres démarches n'amènent pas non plus au résultat attendu. Il s'agit du calcul du prix de la sole pour :

- 900 g seulement (21.15 x 3 = 63.45),
- 100 g seulement (21.15 : 3 = 7.05).

Comme pour les items précédents, des élèves choisissent l'unité *gramme* ou *kilo* pour communiquer le résultat.

Concernant les calculs posés, des élèves :

- considèrent la partie entière du nombre décimal 21.15 seulement et posent l'opération *(21 x 3) + 7 = 70 ;* 7 représente peut-être le complément à 10 pour passer de 300 g à 1 kilo,
- accordent une importance relative à la valeur des chiffres dans le nombre, en particulier dans la partie décimale, et additionnent *7.50 fr.* au lieu de *7.05 fr.* dans (21.15 x 3) + 7.05,
- font des erreurs de calcul (maîtrise des tables ou de la technique de l'algorithme),
- n'évaluent pas la taille du résultat obtenu ou n'estiment pas la réponse pour valider celle-ci comme possible. Le prix du kilo est parfois plus bas que le prix pour 300 g de sole.
- additionnent deux termes correspondant à un prix en francs et à un poids en grammes.

L'ensemble du problème

Dans le problème *Au marché*, la comparaison des grandeurs 200 et 1000, 250 et 1000 est plus simple, et le pourcentage de réponses correctes plus élevé, que celle de 300 et 1000. La difficulté est de faire le bon choix sur le couple de données à partir duquel trouver la solution : (300 ; 21,15) ou (300 ; 1000).

C'est surtout au niveau du sens que les erreurs sont les plus fréquentes. A chaque item, des élèves choisissent l'unité *gramme* pour communiquer un prix au kilo. Il arrive aussi que certains additionnent ensemble des nombres correspondant à des unités différentes.

Des erreurs sont dues aussi à la représentation que les élèves ont de la construction du nombre. La signification qu'ils donnent aux chiffres dans le nombre occasionne des fautes au niveau des retenues et de la place de la virgule dans le nombre. La maîtrise approximative du nombre les limite dans l'utilisation des propriétés des opérations et dans la validation des résultats par l'estimation.

Le pourcentage d'absence de réponse aux items augmente au fur et à mesure que le taux de réussite diminue.

Un point a été attribué chaque fois que le prix du kilo mis en évidence était exact.

Tableau 5 : Distribution du score total au problème « Au marché »

	Score total				
	0	1	2	3	Tot
% élèves	31.1	11.1	42.2	15.6	100

15.6 % des élèves parviennent à calculer le prix du kilo pour les 3 items du problème mais 2 fois plus d'élèves échouent les 3 items. Le taux de réussite moyen aux 3 items est de 47.4 %.

2.2.3 LA SALADE GRECQUE

La tâche

Pour l'entrée, Archimède a prévu une salade grecque.

Complète le tableau de la recette en indiquant les unités.

La recette est prévue pour 4 personnes et les amis seront 10 à table.

Recette de la salade grecque

Recette pour 4 personnes	Recette pour 10 personnes
8 cuillères à soupe de vinaigre	. . . . cuillères à soupe de vinaigre
. . . . g de tomates	1,5 kg de tomates
200 g de féta (fromage)	. . . . g de féta (fromage)
. . . . olives noires	60 olives noires
. . . . dl d'huile d'olive	2,5 dl d'huile d'olive
1 concombre	. . . . concombres

La salade grecque est un problème de linéarité. Pour le résoudre, l'élève doit être capable d'organiser des données, de les mettre en correspondance pour déterminer la valeur de la relation, choisir et effectuer correctement les opérations mathématiques qui en découlent.

Toutes les informations fournies varient avec le changement du nombre de convives. Comme dans tous les problèmes de recette, la situation fait intervenir des variables liées par un coefficient de proportionnalité. Ces coefficients peuvent être mis en évidence à partir d'un couple de données. Pour trouver l'image de l'élément donné, il y a deux démarches qui dépendent du sens de la relation.

Réponses :

a) Passage de 4 à 10 personnes :

Item 1 : **20** cuillères à soupe de vinaigre
Item 3 : **500** g de féta
Item 6 : **2.5** ou **3** concombres

b) Passage de 10 à 4 personnes :

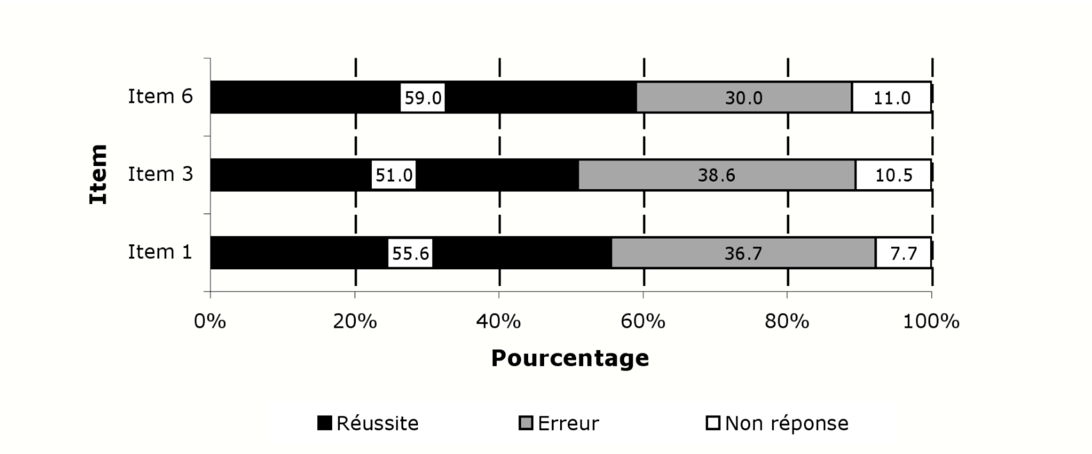
Item 4 : **24** olives noires
Item 2 : **600** g de tomates
Item 5 : **1** dl d'huile d'olive

Les résultats

Item par item

La plupart des élèves n'ont pas laissé de traces de la procédure adoptée ; la taille des nombres étant petite, ils ont effectué leurs calculs mentalement. C'est à partir de la réponse que nous avons déterminé la démarche de l'élève pour compléter la recette. Nous analyserons d'abord les résultats aux items 1 – 3 – 6. Ceux-ci obligent l'élève à passer des quantités pour 4 à des quantités pour 10 personnes. Ensuite, nous développerons les items 2 – 4 – 5 qui font passer de 10 à 4 personnes.

a) Passage de 4 à 10 personnes



Pour passer de 4 à 10 personnes, les taux de réussite varient peu ; plus le nombre de départ est élevé et plus le taux est faible. Quatre procédures sont possibles pour trouver l'image des ingrédients des items 1 — 3 et 6 :

- multiplier par « le facteur de proportionnalité 2.5 » qui permet de passer du domaine des quantités pour 4 aux quantités pour 10,
- ajouter 2 fois et demi les quantités, considérant 10 comme 4 + 4 + 2,
- diviser le nombre de départ par 4 pour trouver la quantité pour 1 personne puis multiplier le résultat par 10,
- chercher la quantité pour 2 personnes (: 2) puis pour 10 personnes (x 5).

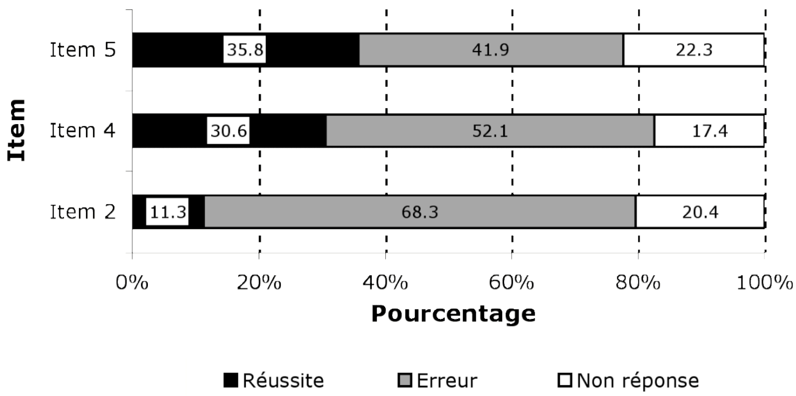
Les élèves ont bien l'idée que la quantité doit augmenter. Pour ceux qui n'ont pas réussi, l'augmentation des ingrédients se traduit par l'une des démarches suivantes :

- une multiplication par 10 sans passer au préalable par l'unité,
- une multiplication par 4 (recette donnée pour 4 personnes),
- une multiplication par 6 (différence entre 4 et 10 personnes),
- une addition de la quantité prévue pour 4 avec le nombre de personnes 2 – 4 — 6 – 10 ou 14,
- le double de la quantité de départ (= recette pour 8 personnes),
- une multiplication par 5,
- le nombre de départ comme réponse.

Les taux relatifs à chaque démarche erronée ci-dessus varient d'un item à l'autre.

Le nombre donné au départ peut être aussi source de difficulté ou faire apparaître des erreurs de calcul. Il est plus facile de diviser 8 et 200 par 4 que 1 par 4.

b) Passage de 10 à 4 personnes



Le pourcentage de réussite diminue fortement lorsque les élèves doivent passer de 10 à 4 personnes. L'absence de réponse augmente. Le taux correspondant aux absences de réponse est indépendant du taux de réussite. 5.2 % des élèves de notre échantillon ne répondent à aucune des six variables.

Les élèves ont en général pris conscience que le résultat devait diminuer. Du point de vue mathématique, la diminution se traduit par une opération ou une suite d'opérations équivalentes au *facteur de proportionnalité x 0.4* :

- une multiplication par le facteur 0.4,
- une division par 2.5,
- une division par 10 (passage par l'unité), une multiplication par 4,

- une division par 5 (quantité pour 2 personnes), une multiplication par 2.

Les réponses erronées observées correspondent au quotient d'une division par 10, 4, 5, 6, 2 ou 3. Étonnamment, comme pour le passage inverse de 4 à 10 personnes, les élèves n'appliquent pas forcément la même procédure pour résoudre les 3 items.

Outre la procédure, d'autres éléments pouvaient causer des difficultés :

- la taille et la nature du nombre de départ (un nombre décimal ou nombre naturel),

- la conversion de l'unité (1.5 kg en g).

La question la moins bien réussie (item 2) renferme ces deux caractéristiques.

L'ensemble du problème

Les élèves sont peu nombreux à avoir réussi à compléter entièrement la recette. Ils réussissent mieux le passage de 4 à 10 personnes (fonction x *2.5*, ou toute démarche correspondante) que celui de 10 à 4 personnes (x *0.4,* ou toute démarche correspondante). Dans le cas le plus facile, le pourcentage de réussite reste faible puisqu'il n'atteint pas 60 %. La solution la plus directe exige de savoir donner du sens aux opérations et de bien comprendre la signification du chiffre dans le nombre pour trouver l'opération unique à exécuter (facteur de linéarité). Les autres élèves passent par l'unité en calculant la recette pour 1 personne ou complètent des tableaux de grandeurs proportionnelles en utilisant la règle du produit ou celle de la somme.

Chaque donnée étant traitée pour elle-même (une seule donnée par ingrédient), l'élève ne peut pas auto-évaluer son résultat par comparaison des nombres d'un item à l'autre, d'une ligne à l'autre.

Nous avons attribué un point par item correct.

Tableau 6 : Distribution du score total au problème « La salade grecque »

	Score total							
	0	1	2	3	4	5	6	Tot
% élèves	25.9	12.7	13.8	14.6	12.4	14.0	6.6	100

6.6 % des élèves parviennent à répondre correctement aux 6 items du problème 8. Le principe des proportions entre ingrédients n'est donc pas maîtrisé. Si les élèves comprennent les données d'une recette de cuisine, ils savent bien qu'il doit y avoir un rapport entre les nombres, mais ils sont nombreux à ne pas savoir quelle écriture mathématique poser avec les nombres qu'ils ont à disposition, comme le montrent les procédures ci-dessus. Le taux de réussite moyen aux 6 items est de 40.5 %. Ces résultats sont d'autant plus surprenants que ce type de problème est un classique, qui a déjà certainement été vu en classe. Le sens des opérations ne semble pas assuré chez tous les élèves.

2.2.4 COMMENTAIRES

Compétences des élèves

Les trois problèmes *Les Îles Éoliennes, Au marché* et *La salade grecque* sont des situations de la vie courante où interviennent des *Applications*. Ils traitent de plusieurs aspects du concept : l'observation et l'interprétation d'un graphique, la relation entre les deux grandeurs *masse* et *prix*, le respect de la proportionnalité des quantités en jeu dans une recette de cuisine. Pour chaque aspect, les items présentent des degrés différents de difficulté. Les obstacles ne sont toutefois pas les mêmes dans le problème 6 (Graphique) que dans les problèmes 7 (Poisson) et 8 (Recette).

Concernant le problème 6 (Graphique), les questions demandant des approfondissements sont moins bien réussies que les questions auxquelles le graphique permet de répondre sans équivoque. Les élèves savent mieux interpréter des positions sur une représentation graphique de déplacements de bateaux, y compris les croisements de ces bateaux. Le taux de réussite diminue lorsqu'ils doivent établir des relations et effectuer un raisonnement à la fois sur les axes et sur la représentation graphique. La confusion entre le sens de *à quelle heure* (l'instant) et le sens de *combien de temps (la durée)* peut représenter aussi un obstacle pour lire le graphique.

À propos des problèmes 7 (Poisson) et 8 (Recette), les taux de réussite montrent que le concept de proportionnalité est en cours de construction et que son emploi reste très peu sûr. Les élèves saisissent les éléments pertinents du problème ; ils comparent les nombres à disposition et présentent en général une solution. Ils écrivent l'opération qu'ils croient être la bonne. Dans la salade grecque, ils sont nombreux à ne pas prendre conscience que le résultat obtenu n'aurait aucun sens dans la réalité, le non-respect des quantités en jeu n'étant pas sans conséquences sur le plan culinaire !

La taille, la nature des nombres et le couple de données à partir duquel ils trouveront la solution constituent les obstacles suscitant des taux de réussite différents pour l'ensemble des items d'un problème. Ainsi, la capacité de rechercher les facteurs linéaires en jeu dépend de ces obstacles.

Trois autres facteurs sont source de difficultés pour certains élèves :

- le fait de devoir effectuer plusieurs opérations successives,
- la présence d'une mesure en grammes et en kilos dans une même donnée,
- les opérations avec des nombres rationnels.

Le taux de réussite moyen aux 3 problèmes du domaine des applications est de 50.1 %.

Notions évaluées par rapport au temps prévu pour l'apprentissage

Une première approche des *Applications* est faite à l'école primaire et en cinquième et sixième année. Une étude systématique des fonctions est réservée aux degrés 7 à 9.

Le travail entrepris au CYT à propos des applications reste une phase d'observation de situations. Des élèves travaillent encore par essais successifs et on peut s'attendre à ce que les premiers liens auxquels ils vont penser pour compléter un tableau de correspondance soient de type additif. La reconnaissance du facteur ou coefficient est complexe en 5e et en 6e année.

Dans cet esprit, l'étude des *Applications* au CYT n'amène pas l'enseignant à orienter l'élève vers l'usage d'outils comme le passage par l'unité ou la *règle de trois* afin de ne pas dériver vers des activités dépourvues de sens. On peut quand même se demander si des exercices rituels permettraient aux élèves en difficulté d'atteindre la réussite en appliquant des règles.

Dans le domaine du calcul, c'est en sixième année que les élèves doivent pouvoir effectuer des opérations avec des nombres décimaux, nombres encore peu familiers en fin de cinquième. Ils enrichissent leurs concepts à propos des nombres rationnels en y adaptant les opérations qu'ils connaissent sur les nombres naturels. Le calcul d'une estimation permettant d'obtenir l'ordre de grandeur du résultat est complexe pour des élèves en difficulté. Ainsi, pour des calculs bien posés dans les problèmes 7 (Poisson) et 8 (Recette), il arrive que la virgule soit mal placée.

2.3 GÉOMÉTRIE ET MESURES

Trois problèmes proposent des activités à la fois numériques et géométriques. Les élèves sont confrontés à des mesures d'angles (*Les voyages d'Archimède autour de la Méditerranée*), de longueur et d'aire (*Eurêka*), à la mesure des longueurs des côtés du développement d'un solide et au calcul des aires de certaines surfaces (*Les solides d'Archimède*). Ces mesures, qui sont des nombres, conduisent à des opérations arithmétiques.

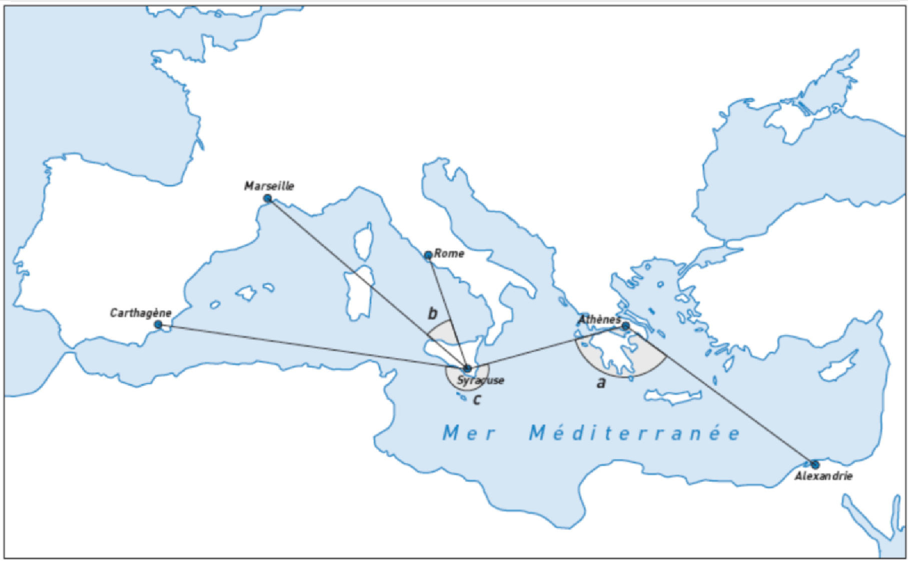
2.3.1 LES VOYAGES D'ARCHIMÈDE AUTOUR DE LA MÉDITERRANÉE

La tâche

Durant sa vie, Archimède a beaucoup voyagé autour de la mer Méditerranée.

Mesure précisément les 3 angles indiqués sur la carte.

Donne tes réponses en degrés.



Le problème *Les voyages d'Archimède* se limite à une mesure de l'angle de chaque item, à ± 2 degrés. Pour déterminer la grandeur de l'ouverture des angles, les élèves doivent savoir faire usage du rapporteur et communiquer le résultat en *degrés.*

Le plan du bassin méditerranéen est délimité par des demi-droites de même origine deux à deux, et qui relient une ville à une autre. Un arc de cercle situé dans un des angles formés par les deux demi-droites renseigne l'élève sur la partie du plan à mesurer.

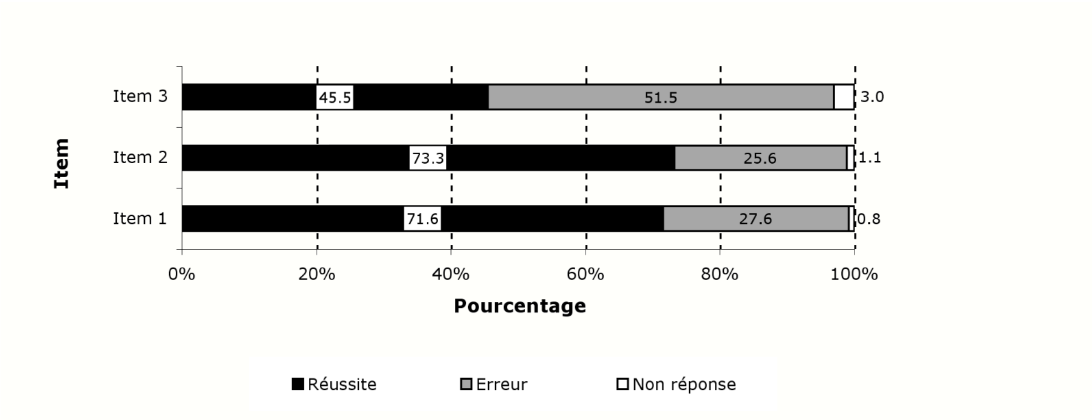
Réponses :

Item1, angle a : **129°** (Syracuse – Athènes – Alexandrie)

Item 2, angle b : **31°** (Marseille – Syracuse – Rome)

Item 3, angle c : **203°** (Carthagène – Syracuse – Athènes)

Les résultats



Item par item

La mesure de l'angle aigu (item 2) est la mieux réussie ; celle de l'angle obtus (item 1) s'avère légèrement plus difficile pour les élèves. La mesure du 3e item est la plus complexe. Moins de la moitié des élèves mesurent de manière exacte l'angle rentrant ou non convexe *c*. Ce taux de réussite montre que la mesure d'un angle supérieur à 180° rend la procédure de mesurage plus difficile. La résolution passe soit par la décomposition de l'angle de 203° en deux angles de 180 et 23°, soit par la mesure de l'angle opposé, puis la recherche du complément à 360° (360 – 157 = 203).

Parmi les élèves qui n'ont pas réussi, 11.8 % repèrent que l'angle est dans l'ordre des non convexes mais la mesure est inexacte, les autres écrivent une mesure relative à un angle aigu ou obtus, inventent un angle supérieur à 360° ou n'entrent pas dans la tâche.

L'ensemble du problème

Environ trois quarts des élèves de 6e arrivent à mesurer correctement les angles inférieurs à 180°. Ils sont moins nombreux à réussir ceux dont la mesure est supérieure à 180°.

La procédure est purement pratique et ne révèle pas la conception de l'élève à propos de la notion d'angle. Toutefois, deux graduations pouvant se lire sur un rapporteur, une réflexion sur l'ouverture des angles s'avère nécessaire pour déterminer le nombre qui correspond à l'angle que l'élève mesure. Des élèves ne disposent pas de cette capacité de voir la situation. Ils mesurent par exemple 51° au lieu de 129°, le complément à 180° ou 157° au lieu de 203°, le complément à 360°. Dans ce cas, on peut dire que le *concept d'angle* n'est pas acquis.

Nous avons attribué 1 point à chaque angle correctement mesuré à ± 2 degrés.

Tableau 7 : Distribution du score total aux 3 items du problème « Les voyages d'Archimède »

	Score total				
	0	1	2	3	Tot
% d'élèves	14	18.2	31.1	36.6	100

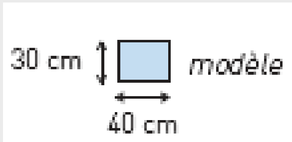
Le problème est totalement réussi pour 36.6 % des élèves. Le taux de réussite moyen aux 3 items est de 63.5 %.

2.3.2 EURÊKA !

La tâche

Archimède étudia la physique. Lorsqu'il découvrit le principe qui porte son nom, le *principe d'Archimède*, il cria «Eurêka! Eurêka!» («J'ai trouvé! J'ai trouvé!»).

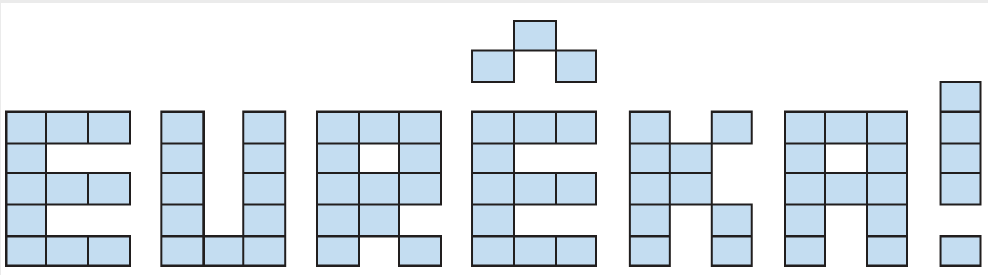
a) Sur la façade d'un musée des sciences, on a reproduit avec du carrelage bleu ce mot, comme le montre le *modèle* ci-dessous.



Chaque pièce du carrelage est un rectangle de 40 cm sur 30 cm.

Calcule l'aire totale du carrelage bleu.

Donne ta réponse en cm2 puis en m2.



Utilise les mesures indiquées sur le *modèle*.

Espace pour tes calculs

Tes réponses :

b) 19 pièces du carrelage sont cassées et doivent être remplacées.

Calcule le prix des 19 pièces si l'une vaut 13,60 francs.

Espace pour tes calculs

Ta réponse :

Pour résoudre la partie *a* du problème *Eurêka*, l'élève doit savoir calculer l'aire de surfaces rectangulaires dont il connaît les mesures de côté, effectuer des multiplications dans IN puis établir des correspondances entre les unités pour exprimer la mesure en cm^2 et en m^2.

Pour résoudre le problème numérique *b*, l'élève doit ensuite traduire la situation en une écriture multiplicative dans l'ensemble Q des nombres rationnels et calculer avec efficacité.

Réponses :

Partie a

Item 1 : L'aire totale du carrelage bleu est de **90 000** cm^2

Item 2 : 90 000 cm^2 = **9** m^2 (conversion)

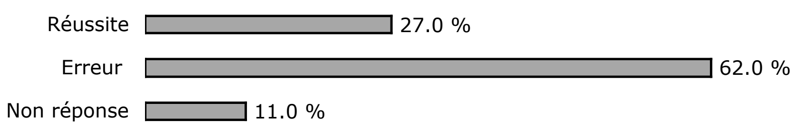
Partie b

Item 3 : 19 pièces du carrelage coûtent **258.40 fr.**

Les résultats

Partie a du problème « Eurêka ! »

Item 1 :



27 % des élèves calculent l'aire des pièces de manière exacte (90 000 en cm^2 ou 9 en m^2). Ils cherchent d'abord l'aire d'une pièce. Ensuite, ils dénombrent soit les 75 pièces du carrelage, soit les pièces nécessaires à chaque lettre. Ces étapes les amènent ensuite à calculer l'aire totale du carrelage en un seul calcul ou par l'addition itérée de l'aire de chaque lettre et signe.

Les erreurs les plus fréquentes et les démarches erronées sont regroupées sur deux niveaux :

a) l'interprétation de l'énoncé :

- la réponse donnée correspond au dénombrement des pièces du carrelage,
- la réponse correspond à l'aire d'une pièce du carrelage.

b) les outils de calcul :

- La démarche est correcte, les opérations sont bien posées mais contiennent des erreurs de calcul et/ou de technique. Le plus souvent, ce sont la gestion des zéros dans le produit de 30 x 40 et la technique de l'algorithme de la multiplication pour multiplier un nombre à deux chiffres qui posent problème.

- La procédure consistant à calculer l'aire de chaque lettre puis l'aire totale du carrelage augmente le pourcentage de chance de faire des erreurs puisqu'elle exige de poser plusieurs multiplications et de calculer la somme des produits obtenus.

- Le choix des calculs posés n'est pas adéquat, le calcul d'aire est confondu avec le calcul du périmètre. L'élève additionne les mesures du contour de chaque lettre.

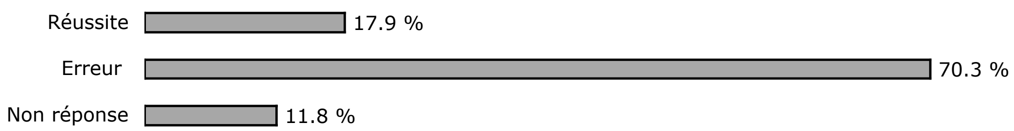
  Exemple : aire de la lettre E (en cm^2)

  (40+40+40+40+40+40+40+40+40+40+40+40+40+40)+(30+30+30+30+30 +30+30+30) = 560+240 = 800

  Dans sa démarche, l'élève a omis 2 côtés de 30 cm.

- Le dénombrement n'est pas correct. Les élèves peuvent oublier de compter les pièces de l'accent circonflexe. Les uns additionnent par écrit le nombre de pièces nécessaires par lettre. Parmi eux, certains font des erreurs de calcul. D'autres comptent en pointant chaque pièce de carrelage. Dans ce cas, il peut arriver qu'ils comptent 2 fois la même pièce ou oublient d'en compter.

Item 2 :



Quelle que soit l'aire de la surface trouvée, seulement 17.9 % des élèves savent établir la correspondance des cm^2 en m^2.

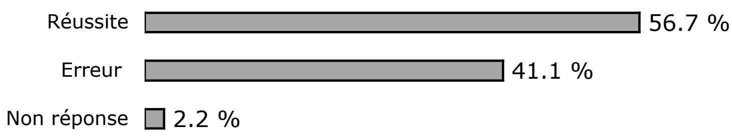
Les deux unités demandées dans la réponse sont toutefois présentes pour 2/3 des élèves. Mais, du côté pratique des changements d'unités, les résultats montrent que la relation *mesure d'aire – mesure de longueur* n'est pas acquise. L'élève peut écrire la réponse correcte en cm^2 et effectuer la transformation en m^2 selon les relations qui permettent d'effectuer des conversions correspondant à des unités de longueur.

Les élèves ne font pas seulement des erreurs de conversion. Ils ont des difficultés à se représenter et à faire la distinction entre les notions d'unités de longueur et d'aire, entre un calcul d'aire et un calcul de périmètre. Par exemple, les unités de mesure mentionnées peuvent aussi bien être, deux à deux, le cm2 et le m, le cm et le m2, … Des élèves donnent leurs résultats avec des unités comme *fois* ou *carrés*, le *carré* représentant une pièce du carrelage. Les copies recèlent régulièrement des réponses comme *L'aire du carrelage bleu est de 90 000 cm.*

7.4 % des élèves seulement réussissent tous les traitements successifs nécessaires à la résolution de la partie a du problème Eurêka, y compris la conversion de 90 000 cm² en 9 m². Le taux de réussite moyen aux deux items de cette partie du problème *Eurêka* est de 22.5 %.

Partie b du problème « Eurêka ! »

Item 3 :



Cette partie du problème ne concerne pas la mesure. Dans le chapitre 3, les résultats à ce problème numérique sont classés avec les problèmes additifs et numériques. Leur analyse porte d'ailleurs sur la capacité de l'élève à résoudre un problème multiplicatif.

Plus de la moitié des élèves posent le calcul et trouvent le produit des facteurs 13,6 et 19. Étonnamment, le taux de réussite est légèrement supérieur à la multiplication dans IN du problème *Les galères* (Paragraphe 2.1.3) bien que l'un des facteurs soit un nombre décimal.

Erreurs observées :

1. 16.8 % des élèves évalués choisissent aussi l'opération adéquate mais ne placent pas correctement la virgule (4.1 %), ou font des erreurs de calcul ou de technique (12.7 %). Comme pour *Les galères*, les principales erreurs concernent les répertoires additif et multiplicatif, les retenues (exemple 1, p. 48) et la technique de l'algorithme (exemples 2 et 3, p. 48).

2. L'observation des erreurs sur la technique met aussi en évidence la non compréhension de la relation entre l'algorithme et la distributivité de la multiplication par 19 sur l'addition. Des élèves multiplient par 9 au lieu de 19 (exemple 2), par 1 au lieu de 10 (exemple 3). Dans l'exemple 4, le résultat *13.79 fr.* met bien en évidence le besoin de consolider le système de numération et la technique multiplicative : l'élève additionne la partie décimale du 1er terme avec la partie entière du second.

Exemple 1 :
L'erreur porte sur la retenue

$$\begin{array}{r} 1\,3\,,\,6\,0 \\ \times \quad 1\,9 \\ \hline 1\,1\,7\,,\,4\,0 \\ 1\,3\,6\,,\,0\,0 \\ \hline 2\,5\,5\,,\,4\,0 \end{array}$$

Erreur retenue
présence virgule

Exemple 2 Exemple 3 Exemple 4
Les erreurs portent sur la technique de l'algorithme

$$\begin{array}{r} 1\,3\,,\,6\,0 \\ \times \quad 1\,9 \\ \hline 1\,2\,2\,,\,4\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,3\,,\,6\,0 \\ \times \quad 1\,9 \\ \hline 1\,2\,2\,4\,0 \\ +\ 1\,3\,6\,0 \\ \hline 1\,3\,6\,0\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,3\,,\,6\,0 \\ \times \quad 1\,9 \\ \hline 1\,3\,,\,7\,9 \end{array}$$

3. 21.8 % des élèves n'estiment pas spontanément la grandeur du résultat par rapport à la situation donnée. Ceux-ci trouvent soit des résultats inférieurs au prix d'une pièce (1.31 fr., 5.40 fr.), soit des résultats nettement inférieurs ou supérieurs au calcul d'estimation *13 x 20 = 260*.

L'ensemble du problème

La situation « *Eurêka* » fait intervenir plusieurs compétences apprises et/ou entraînées au CYT. Si on considère la réussite de toute la situation, un point a été attribué à chaque compétence visée suivante :

- calculer des aires (item 1),
- établir des correspondances (item 2),
- résoudre un problème par une multiplication de nombres écrits en code décimal (item 3).

Si on considère la partie *a* seulement (items 1 et 2), concernant en particulier la résolution d'un problème relatif aux mesures de longueur et d'aire, seuls 7.4 % la traitent avec exactitude alors qu'elle vise des compétences attendues à la fin de la 6e année. Rappelons que le taux de réussite moyen à ces deux items est de 22.5 % (p. 47).

L'item 3 (partie b) est le mieux réussi ; le taux de réussite moyen est de 56.7 %. Il s'agit d'une situation multiplicative qui pourrait être résolue comme une addition itérée. Pour rappel, dans la synthèse, nous avons traité cette partie du problème avec les problèmes du champ numérique uniquement.

Tableau 8 : Distribution du score total aux 3 items du problème « Eurêka »

	Score total				
	0	1	2	3	Tot
% élèves	31.7	41.3	21.2	5.8	100

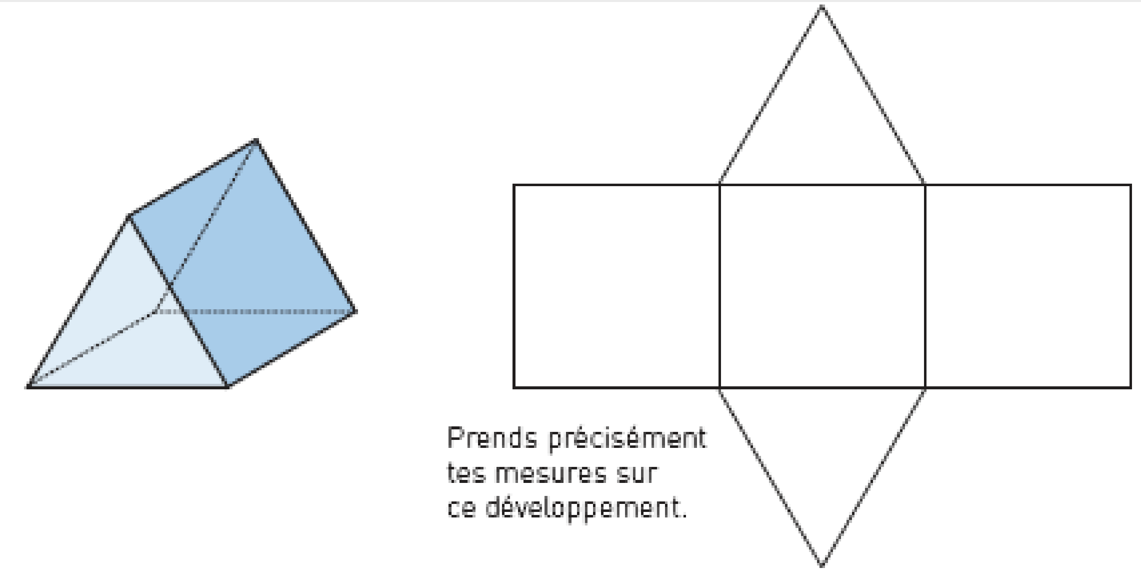
5.8 % des élèves parviennent à mettre en œuvre une démarche et à utiliser correctement les outils du calcul pour résoudre tout le problème. Le taux de réussite moyen aux 3 items du problème est de 33.9 %.

2.3.3 LES SOLIDES D'ARCHIMÈDE

La tâche

Archimède était également mathématicien ; il découvrit de nouveaux volumes.

Voici le «toit d'une maison» et l'un de ses développements.



a) Pour construire ce volume, on réunit les arêtes avec du papier collant.

Calcule la longueur totale de papier collant nécessaire ; indique l'unité.

Espace pour tes calculs

Ta réponse :

b) **Quelle est l'aire totale des 3 carrés de ce développement ? Indique l'unité.**

Espace pour tes calculs

Ta réponse :

Les élèves ont la représentation du solide, *le toit d'une maison,* et de son développement sous les yeux. La tâche proposée concerne la construction mentale du solide à partir de son développement et la reconnaissance des caractéristiques de l'objet.

Pour comprendre la situation *Les solides d'Archimède*, l'élève doit connaître le sens des mots relatifs à la géométrie de l'espace (solide, arête, face carrée, longueur et aire). L'Aide-Mémoire mathématique est toutefois à sa disposition pendant l'évaluation.

Dans la partie *a* (item 1), il doit être capable de déterminer les arêtes à réunir pour construire le solide, de choisir l'unité adéquate afin de mesurer précisément la longueur d'une arête et de quantifier le nombre de morceaux de papier collant nécessaires dans le but de calculer la longueur totale. Celle-ci est le produit d'un nombre décimal par un nombre naturel. Une procédure additive est aussi possible.

Pour résoudre la partie *b* (item 2), il doit savoir calculer l'aire totale des 3 faces carrées du développement par une multiplication de décimaux.

Réponses :

Partie a

Item 1 : La longueur du papier collant est de **13.5 cm.**

Partie b

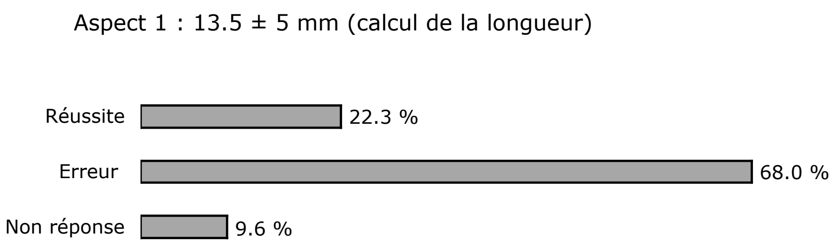
Item 2 : L'aire totale des 3 carrés du développement est de **21.87 cm^2**.

Les résultats

Pour chaque item, deux compétences principales sont visées au niveau des mesures : 1. calculer des longueurs et des aires, 2. utiliser des unités conventionnelles appropriées. Pour cela et vu les pourcentages de réussite obtenus dans le choix des unités de la tâche *Eurêka*, nous avons distingué les résultats liés à ces deux compétences pour chaque item.

Partie a du problème « Les solides d'Archimède »

Item 1 :



La principale difficulté de cet item réside dans le repérage et la quantification des côtés à réunir pour construire le solide à partir du développement. Bien que tous les côtés du développement soient isométriques, 17.35 % des élèves additionnent des mesures variées. Leur compréhension du concept ou de la situation ne leur permet pas de déduire que les côtés du développement qui se touchent dans la phase de la construction du volume sont isométriques. Par exemple, ils prennent en compte la hauteur du triangle (2.4 cm) ou les arêtes du solide situé dans l'espace (2 cm et 2.6 cm). Pour ces élèves, il ne va pas de soi que le côté du carré (segment vertical ou horizontal) ait la même dimension que le côté du triangle auquel il s'assemblera pour former le solide.

Dans le tableau 9, le faible pourcentage des élèves ayant dénombré *5 arêtes* montre que le concept n'est pas acquis.

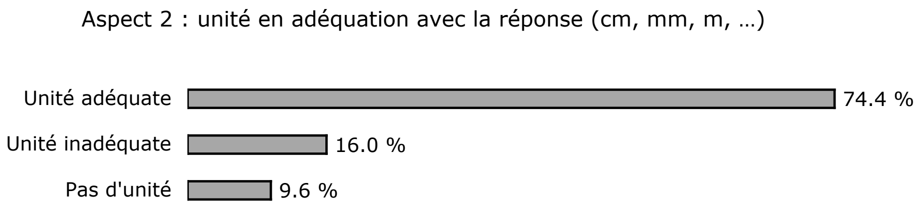
Tableau 9 : Réponses à la quantification des arêtes

Le nombre d'arêtes est :	5	24.0 %
	10	19.6 %
	inférieur à 5	10.2 %
	compris entre 6 et 9	14.9 %
	supérieur à 10	12.1 %
Autres réponses		9.6 %
Non réponse		9.6 %

24 % repèrent les côtés à réunir pour construire le solide à partir du développement et quantifient 5 arêtes. Ceux qui en repèrent 10 ne se soucient pas de les apparier pour former les arêtes du solide. Ils ont cependant compris le sens de cette notion et sont capables de passer du plan à l'espace. La réponse *4 arêtes* correspond certainement au nombre de côtés d'un carré du développement, celle de *8 arêtes* au nombre de segments de 2.7 cm que forme le rectangle.

L'étape suivante est de prendre la mesure de l'arête sur le développement. 71.3 % des élèves y parviennent avec précision (2.7 cm à ±1 mm). Du point de vue de l'usage de la règle graduée, des élèves confondent 2.7 cm avec 2.2 cm.

Finalement 22.3 % parviennent à résoudre ce problème de mesure et trouvent la réponse numérique attendue à 13.5 (en cm à ± 5 mm). Les élèves ayant posé le calcul avec les nombres corrects pour connaître la longueur du papier collant n'ont pas tous obtenu un résultat exact à la multiplication ou à l'addition itérée. Nous nous sommes limités ici à évaluer les compétences des élèves au niveau des outils du calcul géométrique pour résoudre le problème. Nous n'avons pas cherché le pourcentage d'élèves ayant calculé de manière exacte le produit de 2 nombres autres que (2.7 ± 1 mm) x 5.

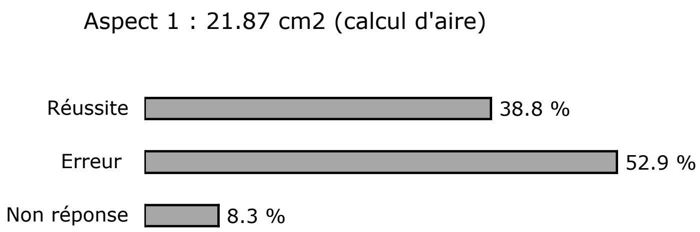


Trois-quarts des élèves utilisent l'unité conventionnelle appropriée en m, cm ou en mm pour mettre en évidence la réponse cherchée. D'autres, peu nombreux, font usage d'une unité de longueur qui n'est pas en adéquation avec la taille du nombre et la longueur réelle du papier collant nécessaire. Les autres n'indiquent pas l'unité ou choisissent soit des unités convenant aux calculs des aires et des volumes, soit des unités qui ne correspondent pas à un outil de géométrie (morceaux de papier, couches de colle, unités, ...).

Le taux de réussite moyen pour les deux aspects de l'item 1 est de 48.4 %.

Partie b du problème « Les solides d'Archimède »

Item 2 :



La réponse attendue dépend de la mesure à ±1 mm. 38.8 % des élèves calculent avec exactitude l'aire totale des 3 surfaces carrées consécutives et isométriques délimitées par le développement du « toit de la maison ». Deux procédures permettent d'arriver au résultat : 31.7 % calculent l'aire d'une surface carrée et multiplient le résultat par 3 pour trouver l'aire de la surface rectangulaire, 7.1 % mesurent le côté de la surface rectangulaire obtenue par la juxtaposition des 3 carrés et calculent le produit de la mesure de la longueur et de la mesure de la largeur.

Les difficultés ou erreurs recensées concernent :

- Le calcul de l'aire d'une seule surface carrée. Les élèves ne tiennent pas compte du mot « total » dans la consigne.

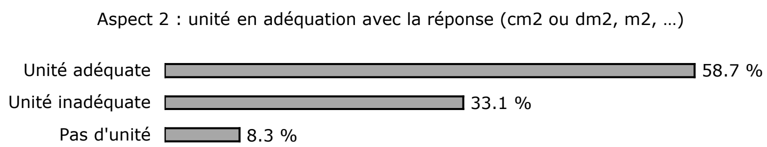
- Le calcul du périmètre du rectangle au lieu de l'aire. Ils dénombrent les côtés des 3 carrés du développement (2.7 x 8) ou calculent le périmètre de tout le développement (2.7 x 10).

- La multiplication d'un nombre décimal (1 chiffre après la virgule) par un nombre décimal (1 chiffre après la virgule).

Comme pour *Les galères* et *Eurêka*, les autres erreurs concernent la multiplication des nombres décimaux. Les élèves font des erreurs de livret, de retenue, ou ne placent pas la virgule au bon endroit. Ils n'estiment pas spontanément l'ordre de grandeur d'un résultat pour valider ce dernier.

Exemples :

Gestion de la virgule	Retenue	Estimation
2, 7	2, 7	2, 7
x 2, 7	x 2, 7	x 2, 7
1 8 9	1 4 9	1 8 9
5 4 0	5 4 0	5 5 0
7 2 9	6, 8 9	6 3, 9



Plus de la moitié des élèves de l'échantillon utilisent l'unité appropriée au calcul de l'aire de la surface à mesurer. Comme pour la partie *a* de ce problème, seulement 2.7 % font usage d'une unité de surface qui n'est pas en adéquation avec la taille du nombre et l'aire réelle de la surface.

Le calcul d'aire passe par une unité de longueur et 17.4 % des élèves conservent cette unité pour présenter leur résultat. Ils mettent ensuite en évidence leur réponse en cm dans une phrase comme *L'aire totale des 3 carrés de ce développement est … cm.*

Les autres n'indiquent pas l'unité ou choisissent soit des unités convenant aux calculs des longueurs ou des volumes, soit des unités qui ne correspondent pas à un outil de géométrie (carrés, degrés, unités, …).

Le taux de réussite moyen pour les deux aspects de l'item *b* est de 48.8 %.

L'ensemble du problème

L'activité est conçue pour vérifier les conceptions de l'élève lorsqu'il passe du développement à sa représentation en 3 dimensions. Ses connaissances sur le vocabulaire géométrique relatif aux solides et leur représentation dans l'espace à partir du plan ont causé, en général, des problèmes pour déterminer les 5 arêtes à coller (24 % de réussite). L'intérêt se situe aussi au niveau du degré de maîtrise de la recherche d'une longueur et d'une aire. Le taux de réussite observé est faible dans les deux situations. Deux tiers des élèves ne sont pas parvenus à investir leurs connaissances sur l'aire du rectangle dans une situation nouvelle.

La difficulté concerne aussi les compétences numériques et les multiplications de nombres décimaux.

Les compétences que nous avons évaluées dans le problème *Les solides d'Archimède* sont :

- transformer mentalement des surfaces pour créer un volume et organiser des informations pour mesurer et calculer des longueurs,
- utiliser l'unité conventionnelle appropriée pour communiquer la longueur cherchée,
- organiser des informations pour mesurer et calculer des aires,
- utiliser l'unité conventionnelle appropriée pour communiquer l'aire d'une surface désignée.

Pour chaque compétence, nous avons attribué un point chaque fois que la réponse de l'élève correspondait à la réponse attendue.

Seuls 9.1 % des élèves évalués ont traité correctement les 4 aspects du problème. Leurs réponses correspondent à celles attendues pour les 2 parties de l'exercice.

Tableau 10 : Distribution du score total aux 4 compétences du problème « Les solides d'Archimède »

	Score total					
	0	1	2	3	4	Tot
% élèves	11.0	25.6	30.6	23.7	9.1	100

Le taux de réussite moyen à l'ensemble du problème *Les solides d'Archimède* est de 48.5 %.

2.3.4 COMMENTAIRES

Compétences des élèves

Les problèmes *Les voyages d'Archimède*, *Eurêka* et *Les solides d'Archimède* permettent de vérifier le degré de maîtrise des outils du calcul géométrique :

- la mesure des longueurs et des angles,
- le calcul des périmètres, des aires et des volumes,
- la correspondance entre les unités de longueur ou d'aire.

Un seul problème, *Les voyages d'Archimède*, concerne les angles. Dans des situations difficiles, le concept d'angle (angle rentrant) n'est pas acquis (36.6 % de réussite totale).

Eurêka (Carrelage) et Les solides d'Archimède (Solide) sont complémentaires. Ils concernent les notions de longueur et d'aire. Environ 3/4 des élèves savent mesurer une longueur avec précision et utiliser l'unité conventionnelle appropriée.

Trois principales erreurs ou difficultés apparaissent lorsqu'il s'agit d'opérer sur ces mesures et de préciser l'unité. Primo, le fait que l'aire et le périmètre sont deux grandeurs d'une même surface semble induire des confusions entre un calcul d'aire et celui du périmètre. Le pourcentage de réussite est faible. Moins de 50 % des élèves posent correctement le calcul d'aire pour résoudre le problème *Eurêka !*

Secundo, les élèves portent peu d'attention sur le choix de l'unité pour répondre à une question sur les longueurs, périmètres ou aires. Les réponses du type *L'**aire** totale du carrelage est de 90 000 **cm*** sont fréquentes.

Tertio, seuls 17.9 % maîtrisent le passage du cm² au m². Leur conception des unités de longueur et d'aire a un impact sur la correspondance qu'ils établissent entre ces unités. Ils appliquent le même rapport pour passer du cm² au m² que pour passer du cm au m. La possibilité de se référer à l'Aide-Mémoire mathématique ne semble pas les aider pour reconstruire la notion évaluée.

Les problèmes *Eurêka* et *Les solides d'Archimède* évaluent aussi les difficultés que les élèves ont à effectuer des calculs. Un peu plus de la moitié savent multiplier des nombres décimaux avec efficacité. Pour les autres, nous avons recensé trois types de lacune à la source de procédures erronées et d'erreurs :

- le sens que l'élève donne à une opération dans l'ensemble Q,
- la maîtrise de la technique de l'algorithme de la multiplication et des livrets,
- l'auto-évaluation d'un produit pour déterminer la pertinence d'un résultat.

Le taux de réussite moyen, pour ce domaine, atteint 47.6 %.

Notions évaluées par rapport au temps prévu pour l'apprentissage

L'apprentissage de la mesure d'angle débute en 6e année. La pratique de la mesure d'angles avec le rapporteur se poursuit jusqu'en 9e année. Quatre compétences relatives à la construction géométrique et aux propriétés des figures concernent les angles dans le plan d'études 7e-8e-9e. Cela devrait permettre de renforcer l'aptitude des élèves à comparer des angles au cours des années suivantes.

Le calcul des aires de surfaces comme le carré, le rectangle, le parallélogramme et le triangle est une compétence du plan d'études attendue pour la sixième année. Les résultats montrent que la construction de ce concept est délicate et qu'il s'agit de le consolider avant d'aboutir, en 7e année, à la formule $a \times b = A$.

L'unité d'aire conventionnelle, le cm^2, est introduite en 5e. Les résultats correspondants au calcul de l'aire et au passage du cm^2 au m^2 montrent bien que la notion d'aire est encore en construction en 6e année. Celle-ci représente un travail important au CYT. Davantage de temps doit être consacré pour donner aux élèves l'occasion de distinguer clairement les trois types de grandeurs et en comprendre les caractéristiques. Une bonne compréhension des concepts en jeu serait souhaitable pour éviter une application mécanique de procédés permettant de trouver l'aire d'une surface. Mais il semble ici que ces procédés ne soient pas disponibles non plus pour les élèves.

Les connaissances souvent précaires du vocabulaire géométrique relatif aux *Solides* renforcent l'idée que ce thème de sixième année doit rester essentiellement lié à l'expérience, comme le mentionne le plan d'études (temps de sensibilisation). La maîtrise des notions de longueur et d'aire dépend de la représentation propre à l'élève du vocabulaire spécifique aux mesures. Ainsi, des exercices formels de calculs d'aires et de conversion d'unités à propos des aires ne suffisent pas à assurer la compréhension de ces concepts, mais peuvent constituer un point de départ nécessaire pour les élèves éprouvant des difficultés.

Du point de vue numérique, l'activité fait appel à la multiplication dans Q, avec un seul facteur de type décimal. La multiplication en colonnes s'effectue avec des nombres entiers. Pour ramener ensuite le quotient du nombre naturel au nombre décimal, il faut disposer d'une bonne connaissance de la numération. Le travail d'estimation du résultat est aussi un outil essentiel, mais en général peu utilisé, pour évaluer la taille de la réponse et placer correctement la virgule.

3. SYNTHÈSE DES RÉSULTATS

À partir d'un échantillon aléatoire de classes, l'analyse détaillée des productions d'élèves et les pourcentages de réussite ont permis de mettre en évidence le niveau d'acquisition des apprentissages à l'intérieur d'une compétence (chapitre 2).

L'épreuve que nous avons analysée, proposée à tous les élèves de 6e année, visait à évaluer six compétences spécifiques présentes dans plusieurs problèmes.

Dans notre étude, pour déceler à quelle(s) difficulté(s) les élèves s'achoppent, nous avons analysé chaque item, chacun permettant d'apprécier un élément spécifique d'une notion ou d'un concept, pour autant que les erreurs soient dues à une insuffisance conceptuelle et non pas à des erreurs de calcul. Nous avons aussi différencié les résolutions pouvant exiger une procédure d'un ou deux calculs. Dans le chapitre précédent, nous avons aussi décrit qualitativement la capacité de l'élève à intégrer à bon escient les outils mathématiques nécessaires à la résolution du problème et le degré de maîtrise des compétences spécifiques. Le choix de cette démarche a été suscité par l'observation des résultats de trois types d'évaluation, en particulier :

- l'enquête romande Mathéval,
- l'épreuve cantonale,
- notre pratique de l'évaluation des connaissances acquises à la fin d'un apprentissage chez des élèves du CYT.

Il s'est avéré quelquefois difficile de se prononcer sur la capacité des élèves à mobiliser les acquis pour résoudre un problème donné, dans des circonstances nouvelles. À la fin de chaque analyse des résultats, nous avons présenté le nombre d'items réussis sur l'ensemble du problème pour déterminer la proportion d'élèves capables de réussir entièrement ou partiellement un problème. Nous avons pu constater que ce taux de réussite était souvent faible.

Après avoir analysé les résultats de plusieurs problèmes impliquant des compétences d'un même domaine, nous avons mis en évidence à la fois les forces et les difficultés des élèves. Les compétences évaluées peuvent être classées en trois catégories selon que leur apprentissage concerne, en 6e année, des notions en cours de sensibilisation, de construction ou de mobilisation. Nous avons donc terminé chaque domaine du chapitre 2 par des commentaires sur l'avancement de l'apprentissage pour tenter d'expliquer des pourcentages de réussite plus ou moins élevés.

Dans ce chapitre, nous voulons commenter les résultats du chapitre précédent par niveau d'observation afin d'établir un constat sur les acquis des élèves. Pour cela, nous examinerons globalement :

- les performances des élèves par domaine,

- leur aptitude à traiter un problème,
- leurs compétences générales.

Nous mentionnerons enfin l'impact de facteurs propres à l'épreuve, et consignes de passation et de corrections sur la réussite des élèves.

3.1 PERFORMANCES DES ÉLÈVES PAR DOMAINE

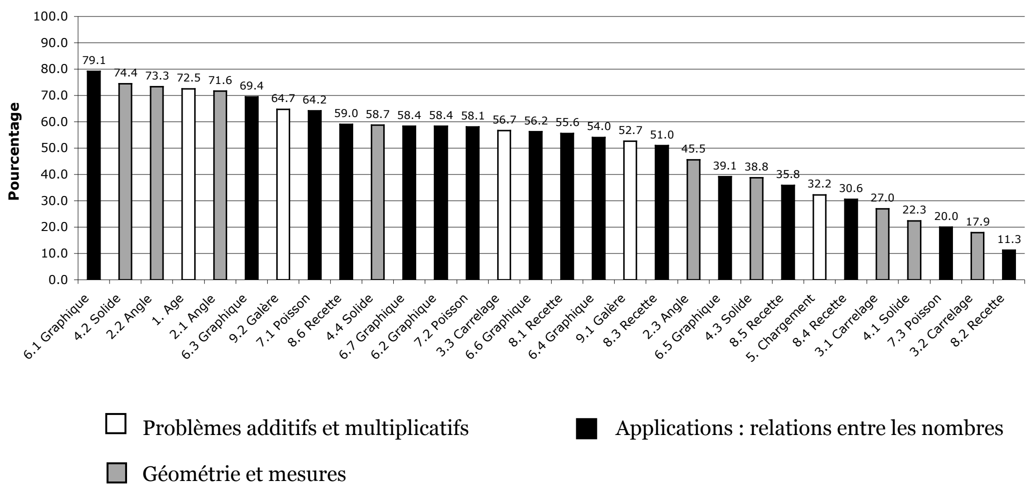
La figure 1 présente les taux de réussite à chaque item dans l'ordre décroissant des pourcentages. Les items relatifs à un domaine sont représentés par un même fond de remplissage. Un item est repérable par un sigle composé de deux chiffres et de la désignation du problème (Ex. : 6.1 *Graphique* signifie item 1 du problème 6 posé sous la forme d'un graphique, *Les Îles Éoliennes*).

Dans chaque domaine, des items sont plus ou moins bien réussis. Dans les 3 domaines et pour chaque item, 1/3 des élèves n'arrivent pas à une démarche et une solution exactes.

Pour un même problème, le classement des items, du mieux réussi au moins bien réussi, met en évidence le degré de difficulté des items les uns par rapport aux autres. Il peut révéler aussi les différentes étapes de l'apprentissage d'un concept. Par exemple, les résultats aux items du problème 6.*Graphique*, mis en lien avec la description des tâches, ont été développés dans le paragraphe 2.2.1 et illustrent la liaison entre réussite des items et complexité notionnelle.

Malgré le caractère grossier de la mesure, les scores obtenus par notre échantillon d'élèves permettent de fixer des repères pour situer l'état d'avancement des apprentissages des notions et concepts mathématiques en fin de 6e année.

Figure 1 : Pourcentage de réussite à chaque item



Dans le but de mieux rendre compte des degrés de maîtrise des objectifs d'apprentissage par rapport au PEV, les résultats à chaque item sont répertoriés dans les figures 2 à 4 : *Pourcentage des réussites, des erreurs et des absences de réponse*. Pour chaque domaine, les items sont classés selon le pourcentage de réussite. Les figures montrent que deux items d'un même problème peuvent obtenir des taux de réussite différents ; on voit aussi que l'absence de réponse n'est pas toujours en lien avec le pourcentage de réussite à l'item.

Problèmes additifs et multiplicatifs

Deux types de problèmes numériques sont évalués : le premier implique de traiter des relations additives et multiplicatives à partir des nombres de la donnée, le second nécessite la mise en relation de deux grandeurs pour pouvoir déterminer un 3^{e} terme (applications).

La figure 2 nous rappelle les taux de réussite des élèves aux problèmes additifs et multiplicatifs[9]. Les problèmes numériques impliquant une seule opération dans IN sont les mieux réussis (problèmes 1. *Age* et 9.2 *Galère*). Le pourcentage de réussite est un peu plus faible (56.7 %) lorsqu'il s'agit d'effectuer une opération sur des décimaux (problème 3.3 *Carrelage*). Il est proche de 50 %, voire inférieur lorsque l'élève doit traiter le problème par deux opérations dans IN (problème 9.1 *Galère* : 52.7 % ; problème 5. *Chargement* : 32.2 %). Dans ce cas, la situation est plus complexe et la non compréhension de l'énoncé ou l'absence de sens donné aux opérations peuvent faire baisser les taux de réussite. Les élèves repèrent des nombres, mais leur appliquent une opération arithmétique de manière systématique sans plus se soucier de ce qu'ils signifient.

Exemple : Calcul d'un nombre de personnes déplacées (problème 9.1 *Galère*) :

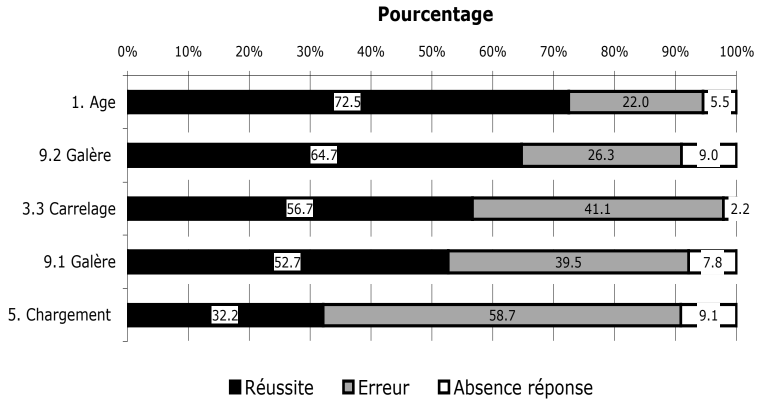
L'élève additionne les caractéristiques de la galère avec les personnes déplacées.

171 + 30 + 18 + 40 + 6 + 57 + 4.5 = 326.5

[9] La partie *b* du problème 3 *Carrelage* (1 item) concerne la multiplication. Nous avons inséré ce sous-problème dans les problèmes additifs et multiplicatifs pour la synthèse des résultats par domaine, figure 8 y compris.

Figure 2 : Taux de réussite des élèves aux items du domaine problèmes additifs et multiplicatifs (N = 357)

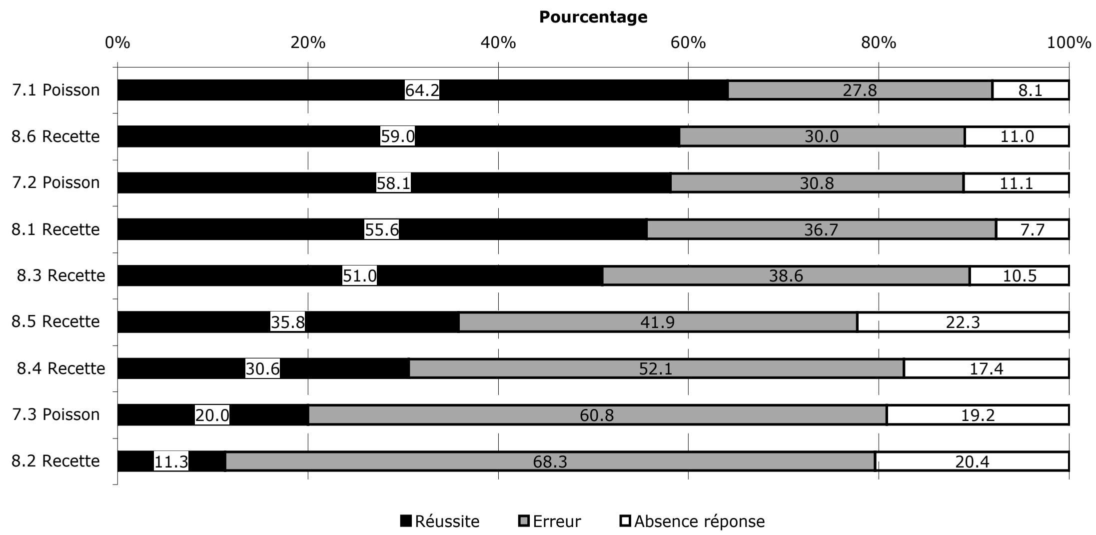
1 soustraction
1 division
1 multiplication
1 addition + 1 multiplication
1 multiplication + 1 division



Applications

Dans le domaine des applications, les faibles taux de réussite totale aux deux problèmes classiques de proportionnalité (problème 7. *Poisson*, problème 8. *Recette*) mettent en évidence la difficulté du concept des applications pour des élèves de 6e année (figure 3). Ici, l'ensemble de nombres dans lequel travaille l'élève n'a que très peu d'incidences sur les variations du taux de réussite. On peut toutefois relever que la recette de cuisine présentée aux élèves (problème 7. *Poisson*) comptabilise un pourcentage de réussite plus ou moins égal à celui observé lors d'un bilan des acquisitions en fin de 6e année (Pochon, 1991, p. 157). Dans cette recherche, 50 % des élèves réussissent le passage de 4 à 15 personnes, alors que 55.2 % des élèves parviennent à passer correctement de 4 à 10 personnes dans la présente étude.

Figure 3 : Taux de réussite aux items des deux problèmes classiques de proportionnalité (N = 357)



Sur le plan numérique et des opérations, les résultats et l'analyse des erreurs nous amènent à des constats qui rejoignent ceux de Guignard & Antonietti (Pisa 2003). Des élèves maîtrisent mal la construction du nombre, le sens des chiffres qui le composent, et peinent à faire le lien entre l'opération posée et le sens de cette opération. Cette difficulté les empêche de réfléchir sur la validité de la réponse au problème.

Pour le problème 6. *Les Îles Éoliennes (Graphique),* du domaine des applications, le lien fonctionnel n'est pas donné par des opérations mais par un graphique. La lecture d'un graphique illustrant une situation se révèle délicate en 6e année, en particulier lorsque la question exige le traitement de plusieurs informations du graphique, bien que le problème ressemble à ceux exercés en classe. Les difficultés liées à la lecture du graphique et à l'interprétation des informations dépendent étroitement de chaque situation.

La description de chaque item et les taux de réussite ont été commentés dans le chapitre 2. Sans surprise, nous avons vu que les élèves parviennent mieux à interpréter les questions auxquelles le graphique permet de répondre sans équivoque et répondent plus difficilement à celles qui demandent des mises en relation. Curieusement, ils trouvent plus facile de traiter des mouvements des bateaux (les segments) que les données sur les axes, ce qui peut être dû à une assimilation du segment au trajet concret du bateau. Cette assimilation permet de répondre aux questions les plus simples.

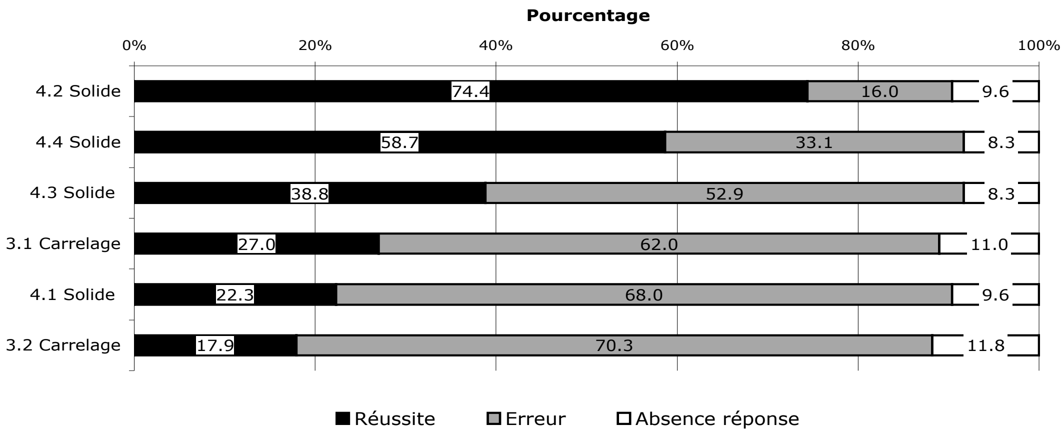
Dans l'ensemble, ces items sont assez bien réussis. Si on compare les résultats de 2 items de notre étude avec ceux plus ou moins semblables de la recherche de Pochon, les performances des élèves actuels sont supérieures de 16 % (repérage d'un lieu : passage de 42 % à 58.4 % ; repérage de l'heure : passage de 63 % à 79.1 %).

Géométrie et mesures

Les problèmes de longueur et d'aire concernent à la fois la géométrie et la numération. Les principales difficultés sont *géométriques*. Pour moins d'un quart des élèves seulement, le repérage des arêtes et leur dénombrement ont été effectués correctement dans le problème des solides, permettant un calcul exact de la longueur demandée. En revanche 3/4 utilisent l'unité de longueur appropriée (cm).

Des difficultés concernent aussi la manière de calculer l'aire (27 à 38.8 % de réussite), l'unité correspondante (58.7 %), la conversion des cm² en m² (11.8 %). Les pourcentages de réussite sont présentés dans la figure 4.

Figure 4 : Taux de réussite aux items des problèmes de longueurs et d'aires[10] *(N = 357)*



Seuls près d'un tiers des élèves parviennent à trouver l'aire d'une surface pour laquelle ils ont dû mesurer les côtés (30 x 40 ; 8.1 x 2.7). Les taux de réussite sont plus élevés dans la recherche de Pochon (69 %), mais les mesures de côté y sont données sous la forme de nombres naturels (8 x 6). Quant à la transformation d'unités des cm² aux m², elle n'est réussie que par 1/4 des élèves environ. Aucune progression n'est à constater, les taux de réussite s'établissent à 28 % et à 17.9 %.

[10] La partie *b* du problème *3. Carrelage* est insérée dans le domaine des problèmes additifs et multiplicatifs.

Comme dans la recherche précédente, nous constatons une forte prégnance des mesures de longueurs ; 11.5 % des élèves transforment 90 000 cm^2 en 900 m^2.

Dans ce domaine, les démarches observées montrent qu'une grande partie des élèves se représentent la situation de manière correcte, mais que notions et concepts ne sont pas suffisamment intégrés pour être utilisés judicieusement en situation à la fin du CYT. On peut rappeler que Rey (2007) préconise, face à cette situation, de petits exercices décontextualisés pour offrir de meilleures chances de réussite à des élèves en difficulté, particulièrement pour le calcul de périmètre et d'aire, et le passage des cm^2 aux m^2 et vice-versa. Mais on ne connaît pas l'efficacité de cette démarche.

Les élèves sont nombreux à savoir comment mesurer des angles à l'aide du rapporteur. Ils sont cependant moins nombreux à facilement mesurer des angles supérieurs à 180°.

3.2 APTITUDE À TRAITER UN PROBLÈME

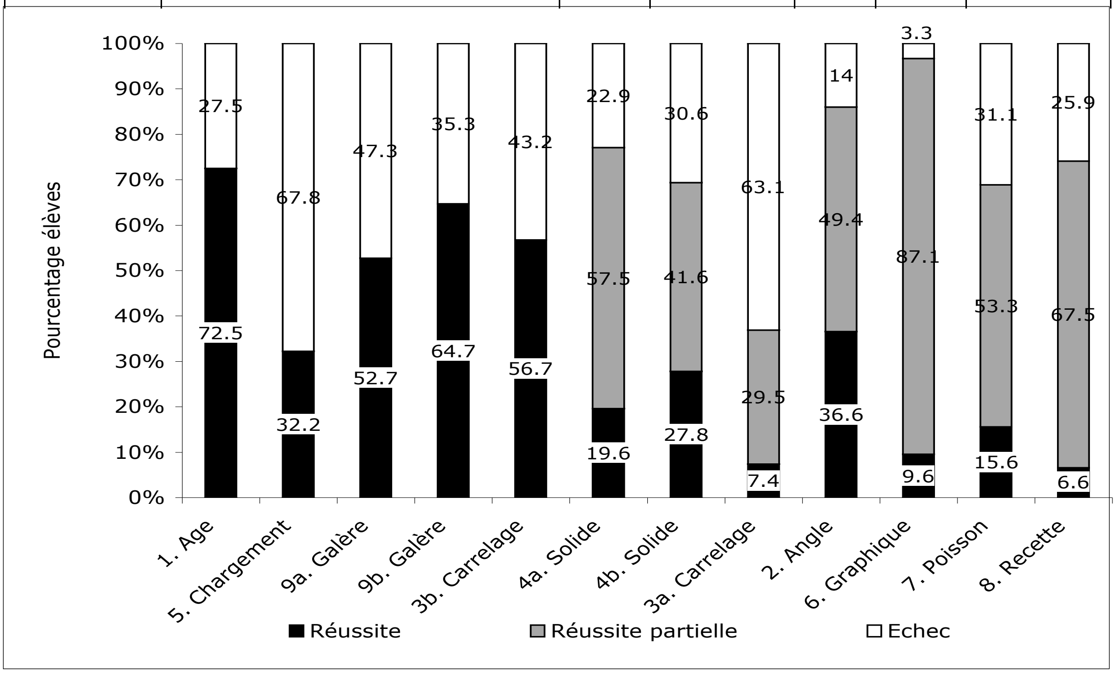
Résultats

Dans le chapitre 2, nous avons indiqué le pourcentage d'élèves ayant réussi x items d'un problème. Un problème évalue la mobilisation de plusieurs compétences d'un même domaine et dans notre étude, ils doivent les maîtriser pour que nous considérions le problème comme « réussi ».

Nous avons calculé les pourcentages de réussite par problème en tenant compte du score obtenu à chaque item. Un problème est parfois décomposé en sous-problèmes (a et b, problèmes 3 – 4 – 9), et le taux de réussite des élèves est calculé en fonction de cet ensemble. Dans ce chapitre, nous précisons, pour chaque problème, les domaines et contenus concernés par ces taux de réussite. Dans le cas des problèmes ou sous-problèmes de plus d'un item, nous avons calculé le pourcentage des élèves ayant réussi tous les items afin de voir dans quelle mesure ils aboutissent à la solution, et le pourcentage de réussite partielle (figure 5). L'importance de la réussite partielle pour les problèmes 2 – 4 – 6 – 7 – 8 s'explique d'ailleurs par le nombre d'items ou d'aspects évalués dans ces problèmes.

Figure 5 : Taux de réussite des élèves aux items des différents problèmes de l'épreuve par domaine et contenu évalués

Domaine	Problèmes additifs et multiplicatifs	Géométrie et mesures			Applications : relations entre les nombres	
Contenu	Opérations simples	Lon-gueurs	Aires	Me-sure degrés	Gra-phique	Problèmes classiques de proportion-nalité



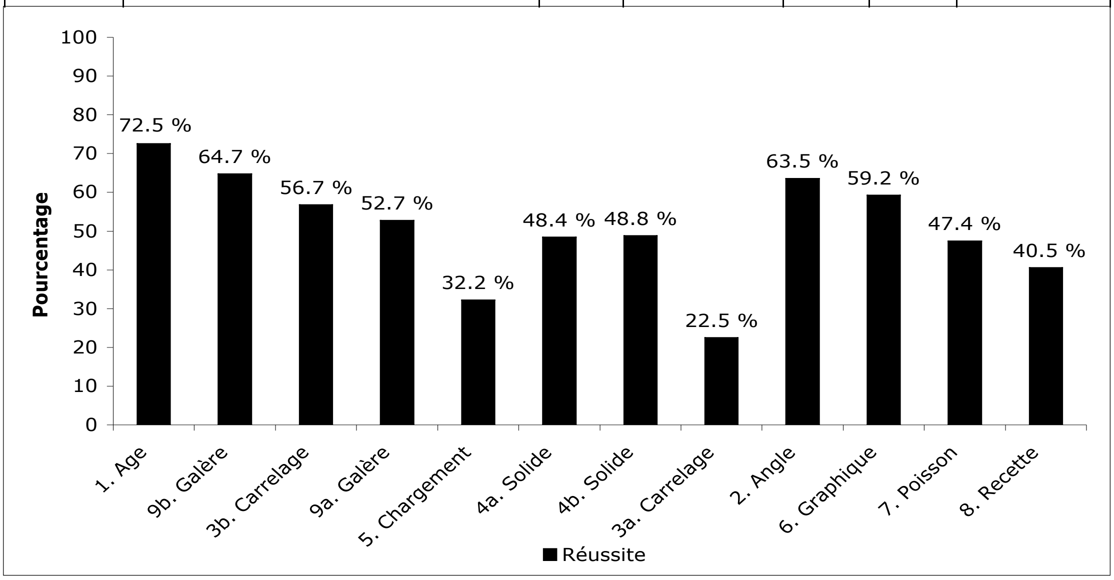
Les élèves sont peu nombreux (moins de 3/4) à réussir totalement un problème. On aurait pu s'attendre à un pourcentage de réussite totale plus élevé étant donné que les problèmes évaluent des objectifs fondamentaux et des compétences spécifiques du plan d'études de 6e année.

Antonietti (2005), dans le rapport Mathéval 4P, arrive à la conclusion que les élèves s'investissent dans la résolution de problèmes mais ne vont pas forcément jusqu'au bout de la démarche de raisonnement ou font des erreurs de calcul. C'est pour cette raison que nous avons aussi voulu connaître le pourcentage d'élèves ayant réussi totalement un problème. Chaque problème impliquant la mise en œuvre de plusieurs opérations qu'ils doivent choisir à bon escient.

Nous avons calculé ensuite les scores moyens de réussite (figure 6). L'analyse détaillée prend toute réussite de l'élève en compte, même partielle. Le pourcentage de réussite est calculé sur la base des points obtenus par les élèves à chaque item. Elle offre la possibilité de comparer les problèmes entre eux en fonction des contenus et domaines évalués. Pour rappel, le tableau 1 du chapitre 1.2.2, répertorie les notions et contenus mathématiques évalués.

Figure 6 : Scores moyens de réussite aux items des problèmes par domaine et contenu évalués

Domaine	Problèmes additifs et multiplicatifs	Géométrie et mesures			Applications : relations entre les nombres	
Contenu	Opérations simples	Longueurs	Aires	Mesure degrés	Graphique	Problèmes classiques de proportionnalité



Dans la première partie de la figure 6, *problèmes additifs et multiplicatifs*, les meilleurs scores de réussite concernent les problèmes simples pouvant être résolus par une seule opération : une soustraction (1. *Age*) et une division exacte avec des nombres naturels (9b. *Galère),* une multiplication d'un nombre décimal par un nombre entier (3b. *Carrelage)*. Pour résoudre les deux autres problèmes, les élèves sont nombreux à avoir eu des difficultés à poser les deux opérations adéquates, le tri des informations étant plus complexe que dans un problème simple. Concernant les problèmes de *géométrie et mesures*, les notions de longueur et d'aire compliquent leur résolution particulièrement lorsqu'il s'agit de mesurer, de calculer et/ou de convertir la réponse dans une unité d'aire appropriée. Le problème le moins bien réussi (3a. *Carrelage*) de ce domaine exige ces trois savoir-faire. Dans les activités 7 et 8 du domaine des *applications* la difficulté est d'organiser les données et de les mettre en correspondance : d'un côté les quantités pour 4 personnes, de l'autre les quantités pour 10 personnes (8. *Recette*). On retrouve une situation analogue dans 7. *Poisson* où les deux grandeurs à mettre en relation sont la quantité de poisson et le prix. Les résultats montrent que les élèves sont nombreux à ne pas réaliser qu'ils sont dans une situation de proportionnalité pour valider leur résultat.

Il faudrait pouvoir interpréter ces résultats dans une théorie de l'apprentissage plus large que celle dont nous disposons. La tendance est maintenant à reconsidérer l'entraînement des calculs élémentaires, qui devraient permettre à l'élève de réactiver des procédures connues dont il ne maîtrise pas encore toutes les facettes.

Pour des objectifs fondamentaux, on constate que les taux de réussite observés sont relativement faibles, quoique non surprenants si l'on se réfère aux enquêtes passées. Avec d'importantes variations de la réussite en fonction des caractéristiques de l'énoncé (voir ci-dessus), les élèves ne maîtrisent les concepts mathématiques qu'une fois sur deux. Plutôt que se désoler, il faut bien constater que cette situation ne génère pas de mauvais résultats en comparaison intercantonale. Comme le relève Jean Moreau pour les résultats PISA 2006 (comme ceux de 2003 et 2000), les élèves vaudois ont obtenu dans l'ensemble des scores satisfaisants en mathématiques et en résolution de problèmes.

Caractéristiques de l'énoncé

Nous savons que les caractéristiques de l'énoncé peuvent avoir des incidences sur la réussite. Nous présentons, ci-dessous, deux points sur lesquels nous nous sommes interrogés.

L'habillage des problèmes

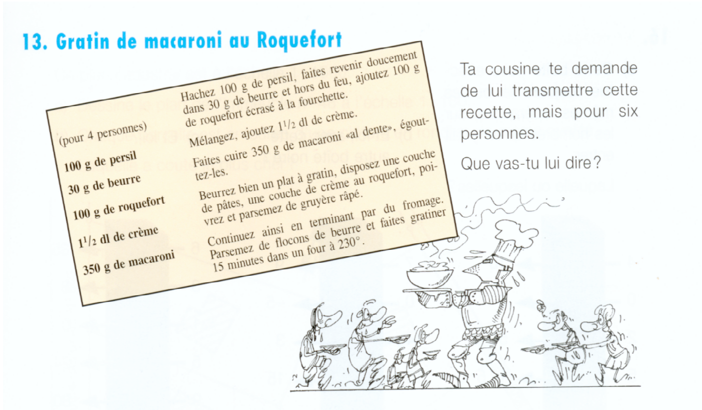
Dans l'épreuve analysée, les problèmes sont très proches de ceux proposés en classe issus des moyens d'enseignement officiels (20 items).

L'exemple de la page suivante permet de comparer l'énoncé d'un problème tiré des moyens officiels[11] (exemple A) à celui d'un problème de l'évaluation cantonale sur le thème des applications (exemple B). Le contexte choisit pour les autres problèmes rend ceux-ci nouveaux pour les élèves (10 items).

---

[11] Chastellain, M., Calame, J.-A., Dreyer, N. & Foggiato, R. (2002). *Mathématiques sixième année.* Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement.

Exemple A



Exemple B

Pour l'entrée, Archimède a prévu une salade grecque.
Complète le tableau de la recette en indiquant les unités.
La recette est prévue pour 4 personnes et les amis seront 10 à table.

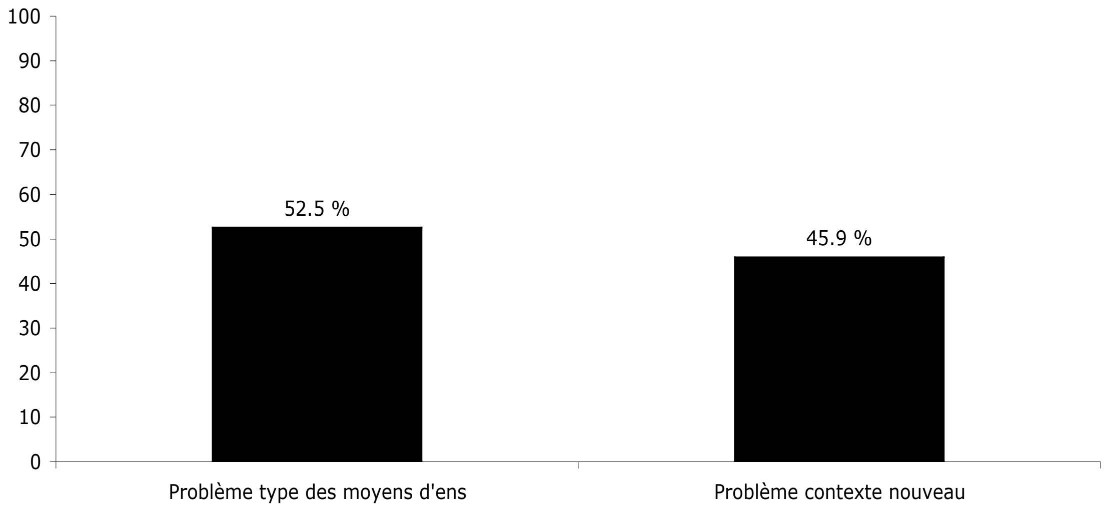
Recette de la salade grecque

Recette pour 4 personnes	**Recette pour 10 personnes**
8 cuillères à soupe de vinaigre	. . . . cuillères à soupe de vinaigre
. . . . g de tomates	1,5 kg de tomates
200 g de féta (fromage)	. . . . g de féta (fromage)
. . . . olives noires	60 olives noires
. . . . dl d'huile d'olive	2,5 dl d'huile d'olive
1 concombre	. . . . concombres

Un autre exemple a été présenté au chapitre 1 (p. 9). Dans les deux cas, les élèves doivent passer du prix pour 300 g de marchandise à son prix pour le kilo.

Le taux de réussite moyen pour des problèmes qui s'apparentent à ceux des moyens d'enseignement officiels n'est pas beaucoup plus élevé que ceux dont le contexte est nouveau pour les élèves (figure 7).

Figure 7 : Taux de réussite moyen aux items selon que les problèmes sont familiers aux élèves ou non (N = 355)



	Problèmes familiers		**Problèmes au contexte nouveau**
2	Les voyages d'Archimède *(Angle)*	1	La vis sans fin *(Age)*
3	Eurêka b *(Carrelage)*	3	Eurêka a *(Carrelage)*
6	Les Îles Éoliennes *(Graphique)*	4	Les solides d'Archimède *(Solide)*
7	Au marché *(Poisson)*	5	Les catapultes *(Chargement)*
8	La salade grecque *(Recette)*	9	Les galères *(Galère)*

La variable *problème familier aux élèves* a donc apparemment peu d'effet sur la réussite. On ne peut cependant pas savoir si tous les élèves ont eu à résoudre en classe les exercices en question. En effet, pour organiser son enseignement en fonction de l'apprentissage visé, le maître fait un choix parmi les exercices pris dans les moyens officiels, voire dans d'autres documents, en plus des situations qu'il réalise lui-même. Mais ces exercices ciblent bien les mêmes objectifs. La réussite pourrait alors dépendre du choix des enseignants.

Une autre explication touche à l'*habillement* de l'énoncé en particulier la longueur du texte, sa présentation dans le plan, la taille des nombres. Ces situations qui nous semblent proches, à nous évaluateurs, paraissent plus ou moins éloignées pour les élèves, même si la démarche menant à la réponse correcte est la même dans les deux cas.

Dans une perspective optimiste, on pourrait dire que le transfert de connaissances de la part des élèves s'effectue facilement puisqu'il n'y a pas de différences entre problèmes censés être familiers ou non. Dans une perspective pessimiste, au vu des taux de réussite, on constate que les problèmes considérés comme familiers ne le sont plus dès qu'une modification de surface intervient.

Les absences de réponse

Les absences de réponse apportent aussi une information relative à l'influence des variables et des caractéristiques de l'énoncé sur la réussite des élèves.

Les plus faibles pourcentages d'absence de réponses à un item concernent :

- la lecture d'informations dans des représentations graphiques,
- le traitement d'un texte bref dans l'énoncé.

Dans les représentations graphiques, les consignes sont en général courtes et la place est prévue pour une réponse courte. Cette présentation du problème aide certains élèves à s'engager plus facilement dans la résolution des items puisqu'ils vont pouvoir lire la réponse attendue directement sur le graphique.

Le pourcentage d'absences de réponses est aussi faible lorsque le texte de l'énoncé est bref, la question posée claire, ne faisant appel qu'à une notion ou à un concept (ex. : *Calcule le prix des 19 pièces du carrelage si l'une vaut 13,60 francs*). Les élèves appliquent alors ce qu'ils ont entraîné en classe et les questions posées peuvent faire resurgir automatiquement le calcul à poser.

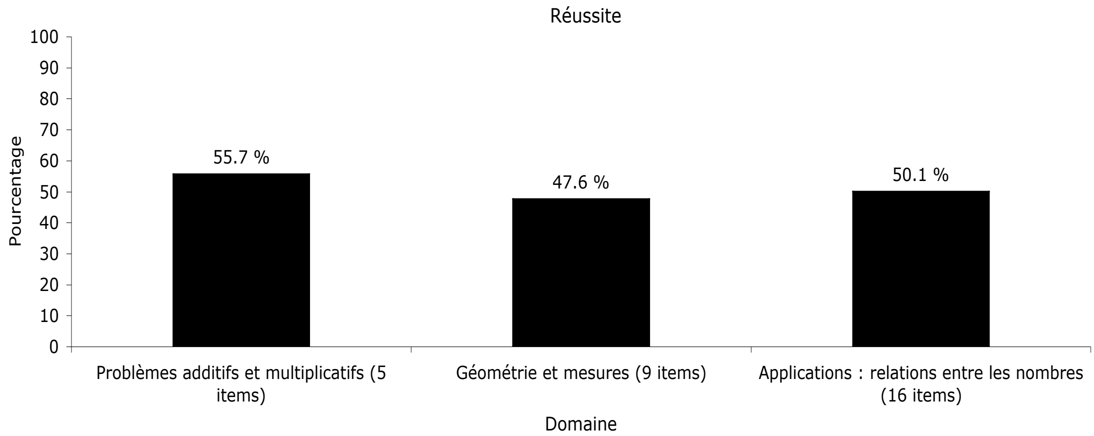
Le taux le plus élevé d'absence de réponses concerne les applications : la transposition de la recette de *La salade grecque* de 10 à 4 personnes (17.4 % à 22.3 %). L'espace laissé pour les calculs n'est en général pas utilisé et l'opération est trop complexe pour qu'elle soit calculée mentalement. 19.2 % des élèves abandonnent aussi face au calcul du prix du kilo de sole, sachant que 300 grammes coûtent 21.15 francs (*7. Poisson*). Avec les problèmes classiques de proportionnalité trois autres items comptent 9 à 11 % d'absence de réponse. On remarque que ce sont ceux qui exigent plusieurs étapes de résolution (*3.1 Carrelage*, *4.1 Solide*, *5. Chargement*).

En résumé, graphique, texte bref, réponse courte, petits nombres et recours à une procédure élémentaire aident les élèves à s'engager dans une démarche de résolution. L'aptitude à lire des consignes et énoncés ainsi qu'à interpréter différentes représentations graphiques ont une influence sur la compréhension du problème et par conséquent sur le choix des notions pertinentes permettant de développer une procédure ou une combinaison de procédures de résolution. Le taux des absences de réponse confirme en général la difficulté de l'item.

3.3 COMPÉTENCES GÉNÉRALES DES ÉLÈVES

Pour donner une vue synthétique, les problèmes de l'épreuve ont finalement été répartis en trois domaines. La figure 8 présente le pourcentage de réussite dans les trois domaines évalués. Le nombre d'items consacrés au domaine est écrit entre parenthèses.

Figure 8 : Résultats moyens des élèves dans les trois domaines évalués (N = 355)



C'est dans la résolution de **problèmes additifs et multiplicatifs** que les élèves parviennent le mieux à choisir et à résoudre la ou les opérations(s) adéquate(s). Ce domaine regroupe 5 items comprenant des nombres naturels ou des nombres décimaux. Les problèmes ne sont pas tous d'égales difficultés par la formulation de l'énoncé et la présentation de la situation d'abord, puis par la présence ou non de nombres inutiles à la résolution (distracteurs), et enfin par le nombre d'étapes de résolution qu'appelle la question.

50.1 % réussissent des problèmes appartenant au domaine des **applications**. Ce résultat est intéressant et montre que la résolution de situations de linéarité reste difficile au CYT. L'analyse des procédures a cependant permis de voir que les élèves sont plus nombreux à « entrer » dans un problème relatif aux applications que ceux des deux autres domaines. Le tri des données semble plus simple à réaliser dans ce cas, car ces données sont arrangées ou mises en évidence dans des tableaux ou graphiques, alors qu'elles sont noyées dans le texte des énoncés dans les autres domaines.

Le domaine le moins bien réussi est celui de la **géométrie et des mesures**. Les élèves doivent appréhender des formes du plan, les mesurer, pour calculer des longueurs et des aires, ce qui nécessite de leur part de mettre en œuvre et d'articuler plusieurs notions pour lesquelles la maîtrise n'est manifestement pas toujours acquise.

3.4 CONDITIONS D'ADMINISTRATION DE L'ÉPREUVE

L'organisation des problèmes dans l'épreuve ne semble pas avoir eu d'influence sur les résultats. L'observation des copies des élèves a montré qu'ils étaient nombreux à ne pas développer de procédure de calcul par écrit particulièrement pour les problèmes *7 (Poisson)* et *8 (Recette)*. On ne peut pas exclure un effet d'ordre des problèmes lié au temps maximum accordé pour la réalisation de l'épreuve. Cependant, le dernier problème ne comptabilise pas un plus grand pourcentage de non réponse que les précédents. L'absence de procédure pourrait dépendre aussi de la place laissée pour les réponses des élèves et de l'habillage de la tâche. Aucune analyse de cette étude ne permet d'apporter un éclairage sur cet aspect.

Nous terminerons ce paragraphe par quelques considérations sur les limites de l'épreuve standardisée telle qu'elle est pratiquée dans le canton de Vaud, dès que l'on veut comparer les résultats entre classes ou établissements du canton.

Du point de vue de la *standardisation de l'épreuve*, dans le but d'attester les apprentissages, nous pouvons relever quelques aspects particuliers qui différencient l'ECR d'une épreuve idéale rigoureusement administrée :

- la version unique de l'épreuve n'exclut pas des risques de copie entre élèves voisins,

- la personne chargée de la surveillance, bien qu'elle reçoive des consignes précises, peut avoir aussi une influence sur l'information transmise aux élèves (nombre d'années d'expérience, maîtres de la discipline ou non, …),

- la performance de l'élève peut varier selon les personnes qui attribuent les points. Les critères sont parfois étroitement en lien. Citons par exemple les objectifs *poser les calculs d'une aire* (1 pt) et *choisir les opérations adéquates* (1 pt). Ils peuvent créer des doutes quant aux points à donner (le calcul d'aire, c'est *la multiplication ;* l'opération adéquate, c'est *la multiplication* avec les bons nombres),

- la connaissance des élèves par le correcteur peut spontanément influencer l'application des critères de correction.

Les points énumérés ci-dessus rendent difficile la comparaison des résultats entre établissements ou entre les classes d'un établissement. La DGEO recommande aux enseignants de corriger les épreuves en équipe pour favoriser l'égalité de traitement et augmenter la vision commune sur le domaine. Nous ne savons pas dans quelle mesure cette recommandation est appliquée.

4. DISCUSSION

Par l'analyse d'une ECR, notre but était de cerner ce que les élèves vaudois de fin de 6e année ont réellement appris. Pour servir le pilotage du système, l'examen d'autres composantes serait cependant nécessaire, comme la validité des items ou les différences significatives qui peuvent exister entre des établissements, des aires géographiques, etc. D'autres travaux sont en cours à ce sujet.

Les résultats des élèves et leur analyse suggèrent deux principales pistes de réflexion au sujet des apprentissages. L'une concerne le sens que les élèves peuvent donner aux contenus mathématiques dans une activité et à leur aptitude à traiter un problème selon l'approche des apprentissages centrés sur les compétences, l'autre est liée aux acquis des élèves en lien avec le Plan d'Études Vaudois.

L'approche de l'apprentissage centré sur les compétences

Conformément aux tendances actuelles, l'approche par compétences est privilégiée dans le Plan d'Études Vaudois. En classe, l'acquisition de savoirs ou savoir-faire à travers des situations-problèmes et des problèmes complexes devrait être une pratique courante pour développer des apprentissages et des compétences.

L'ouvrage de mathématiques du CYT a été conçu pour mettre l'élève face à de véritables situations. Son orientation repose sur des fondements[12] considérés comme applicables à l'ensemble de la scolarité. Ils déterminent actuellement les orientations des moyens mathématiques romands. Selon cette perspective, les notions se construisent au cours de périodes de recherche et cette construction se poursuit tout au long des mises en commun et des activités d'entraînement. Des exercices techniques sont proposés dans le cas où ils sont nécessaires. L'évaluation par compétences s'inscrit bien dans cette approche méthodologique.

Les pratiques en classe ont considérablement évolué avec la mise en œuvre des moyens romands de mathématiques. Elles peuvent encore évoluer dans le sens où le maître peut bien distinguer les apprentissages (contenu, connaissance) et l'intégration des acquis à travers les situations. Dans une approche par compétences, le rôle de l'enseignant est à la fois d'organiser les apprentissages de base, d'entraîner les élèves à un ou plusieurs schémas de résolution, et surtout de préciser dans quelle situation il faut utiliser telle procédure pour amener les élèves vers la résolution de tâches complexes. Il paraît ensuite nécessaire de proposer aux élèves une suite adéquate de situations leur permettant d'utiliser à nouveau les procédures pertinentes dans un nouveau contexte. Dans toute cette démarche, le maître doit

[12] Avant de passer à la phase d'élaboration des nouveaux moyens d'enseignement Mathématiques 1P – 4P, un groupe de travail a rédigé, de 1991 à 1992, une « conception d'ensemble » de la collection qui a fait un large débat en Suisse romande et a été adoptée par les autorités scolaires. *Mathématiques* 5e et *Mathématiques* 6e s'inscrivent dans les lignes tracées par cette conception, qui sont également prises en compte par la collection des ouvrages des degrés 7 à 9.

déterminer les activités qu'il va soumettre à ses élèves en fonction de ses choix didactiques.

L'étude que nous avons entreprise ne nous permet pas de voir l'influence de ces choix sur les résultats des élèves aux ECR, selon que le savoir est transmis par l'enseignant ou découvert et construit par l'élève, selon l'équilibre entre les activités en situation et les exercices techniques.

Dans l'évaluation par compétences, un problème permet d'évaluer l'atteinte de plusieurs objectifs fondamentaux. L'épreuve cantonale vérifie l'atteinte des objectifs fondamentaux du PEV à travers plusieurs situations. Les modalités de correction de l'ECR indiquent à l'enseignant de quels objectifs relèvent les différents aspects de la réponse de l'élève.

L'épreuve est construite de manière à couvrir différents niveaux d'une compétence visée. Rogiers utilise, pour désigner ces niveaux, le terme de *paliers de compétence*. Ils sont définis sur la base de contenus, de plus en plus compliqués, sur lesquels on exerce des activités relevant de la même compétence.

Dans chaque domaine évalué, en moyenne, 50 % des élèves de notre échantillon (figure 8, chapitre 3) parviennent à résoudre les problèmes posés. Les situations sont conçues pour évaluer les connaissances techniques et opératoires des élèves, mais il faut se demander si les situations constituent le moyen le plus adéquat pour évaluer ces connaissances chez tous les élèves.

Les analyses de cette épreuve cantonale montrent en effet la difficulté des élèves à traiter un problème en validant un résultat par une estimation, par une réflexion sur la taille du nombre trouvé par rapport à la problématique ou au contexte. Les erreurs sur le nombre révèlent que la représentation des chiffres dans le nombre est encore en phase de construction et limite les chances de réussite. De même, le sens qu'ils donnent aux opérations reste vague. Ils essaient d'utiliser la notion mais pas toujours à bon escient. La fragilité des acquis entraîne des confusions et occasionne des erreurs. C'est principalement le cas, dans cette étude, pour les calculs d'aire et de périmètre et les unités conventionnelles appropriées à ces notions.

En fonction de ces résultats, on ne peut pas discerner, au cours du temps, une amélioration manifeste du traitement des informations liée à la conception de l'apprentissage[13] propre aux nouveaux moyens d'enseignement. Ceci ne signifie pas pour autant que la résolution de problèmes n'est pas adaptée à des élèves de cet âge. Mais à l'évidence, il n'est pas toujours aisé, pour un élève, de mobiliser ses connaissances dans des situations où l'exécution d'un calcul n'est pas la seule tâche demandée. Malgré les efforts des enseignants pour que les élèves maîtrisent des situations complexes, un bon nombre d'entre eux ont de la peine à s'approprier le problème pour se représenter le but à atteindre. Leur compréhension de l'énoncé ne

[13] Approche socio-constructiviste

leur permet pas de trier les informations pour reconnaître celles qui sont pertinentes et les organiser.

Organiser des activités de recherches dans sa classe et travailler par compétence sont des tâches difficiles pour l'enseignant. On a constaté par exemple avec Mathéval que les phases d'institutionnalisation[14] étaient très peu fréquentes au primaire. Nous ignorons aussi à quelle fréquence les enseignants prévoient du temps en classe pour apprendre à l'élève à aborder une situation-problème ou une tâche complexe.

C'est pourtant ce type d'activité qui est censé aider l'élève à tisser des liens entre les concepts et la procédure afin de donner du sens non seulement à la tâche, mais aussi aux concepts mathématiques. Si les exercices d'entraînement décontextualisés visent à améliorer la maîtrise des notions apprises, ce sont des exercices d'apprentissage demandant une réflexion qui devraient le plus aider les élèves à apprendre, à mobiliser d'une manière adéquate la notion à laquelle on l'a entraîné, et c'est ce qui est recherché.

Dans l'enquête Mathéval 4P, la proportion des élèves vaudois possédant les compétences mathématiques minimales est faible (22 %). Dans notre analyse de l'épreuve cantonale, 33.5 % des élèves réussissent entièrement un problème ou sous-problème; nous avons en moyenne 8.2 % des élèves qui ne répondent pas à un item. En tenant compte des réussites partielles, 50.3 % possèdent les compétences nécessaires à la résolution de l'épreuve. D'expérience, dans un établissement particulier, un groupe d'enseignants remarque qu'un nombre important d'élèves n'atteignent pas 50 % du score total lors de la passation de leurs propres évaluations de connaissances sous la forme de problèmes[15] pourtant choisis dans un domaine de connaissance qui vient d'être appris et entraîné.

Ces résultats ne sont pas spécifiques au canton de Vaud. D'autres résultats de recherche montrent aussi des résultats médiocres dans la maîtrise des problèmes. En 1986, la *National Assessment of Educationel Progress* (NAEP) a mesuré la capacité des élèves à résoudre un problème (niveau attendu : maîtrise des 4 opérations sur des nombres entiers et raisonnement arithmétique élémentaire). Selon Landsheere (1994), les auteurs concluent que moins d'un quart des élèves de 9 ans y parviennent, et environ un tiers des élèves de 13 ans.

Au vu de ces résultats, on doit envisager que la résolution de problèmes pourrait être une source de découragement pour un bon nombre d'élèves qui éprouvent des

---

[14] Dans les commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement (COROME, 1997), l'institutionnalisation est « la mise en rapport de l'activité et des découvertes des élèves avec le savoir mathématique tel qu'il se présente dans une culture et un lieu donnés. Ce rapport peut s'établir individuellement, par groupes ou avec toute la classe lors de mises en commun ».

[15] *problème* est pris dans le sens défini par Fabre (1999, p.87):

- l'énoncé est court, immédiatement compréhensible ;

- l'énoncé n'induit ni la méthode ni la solution (pas de questions intermédiaires) ;

le problème se rapporte à un domaine conceptuel connu des élèves et entraîné en classe difficultés malgré un fort investissement de leur part. Et l'on sait que la motivation face à la tâche est un élément important pour progresser.

On peut donc s'interroger, d'une part, sur les critères propres aux différents niveaux de difficulté des apprentissages : sont-ils plus difficiles à définir lorsque les apprentissages sont centrés sur les compétences ; et ne risque-t-on pas davantage de placer des élèves devant des exercices peu adaptés à leur niveau ? D'autre part, selon le modèle d'apprentissage que choisit le maître dans son enseignement, l'approche par compétences peut être peu familière aux élèves. Si c'est le cas, l'évaluation cantonale, éloignée du type d'activités organisées en classe et d'une forme différente des évaluations internes, peut dérouter les élèves.

Niveaux d'acquisition et types d'évaluation des élèves

Les problèmes visent à évaluer des objectifs fondamentaux du PEV et des objectifs spécifiques, mobilisables en situation en fin de 6e année. Les connaissances correspondantes se trouvent dans des phases différentes : en temps de construction ou de consolidation, voire en temps de sensibilisation. Il va de soi que le taux de réussite ne peut être élevé lorsque les connaissances mathématiques évaluées sont en cours d'apprentissage. Et si la tâche concerne un objectif de sensibilisation, les résultats seront évidemment faibles. L'analyse par item a permis de mesurer le degré de réussite lié au degré de difficulté de l'objectif évalué (figure 1, p. 59). Il est donc utile de lire ces résultats en distinguant deux catégories de compétences : celles qui doivent être maîtrisées en fin de CYT, nécessaires pour poursuivre les apprentissages en 7e, et celles relatives aux notions en cours d'acquisition seulement, mais précieuses pour situer l'avancement des apprentissages. Pour ces dernières, un contexte de haut niveau, nécessitant de donner du sens à une situation avant de mettre en œuvre des connaissances, ne donne que peu de chances à l'élève moyen de montrer les acquisitions de moins haut niveau qu'il a pu construire.

Afin d'éviter de restreindre l'évaluation à une forme de questions trop spécifiques, nous rejoignons Rey et al (2003) qui préconisent un outil d'évaluation en trois phases[16] pour évaluer des compétences. La troisième phase est constituée de petits exercices visant à contrôler que l'élève connaît les différentes techniques nécessaires à la résolution d'un problème, sans pour autant être capable de les mettre en œuvre dans des problèmes complexes (première et deuxième phases).

Les questions soulevées ne concernent donc pas l'adéquation des situations proposées avec les objectifs du PEV. Il faut cependant se demander si le choix de ne proposer que des résolutions de problèmes, impliquant l'usage d'une procédure ou l'articulation de plusieurs procédures, offre la possibilité à tous les élèves de montrer leur capacité à exécuter une opération ou une procédure élémentaire. Pour pouvoir

[16] Un outil d'évaluation en trois phases : 1. une tâche nouvelle impliquant l'usage de plusieurs procédures élémentaires que les élèves doivent choisir à bon escient. 2. la même tâche découpée en sous-tâches dont chacune ne fait appel qu'à une procédure élémentaire. C'est à l'élève qu'il revient de choisir la procédure qui convient. 3. De petits exercices décontextualisés qui visent à contrôler que l'élève maîtrise les différentes procédures qui étaient nécessaires dans la tâche de départ.

agir face à un problème, il faut le comprendre. Selon le contexte, on constate que l'élève peut choisir le bon calcul dans une situation et peut ne pas en être capable dans une autre. Ne faudrait-il pas aussi leur donner la possibilité de montrer leur savoir en évitant la barrière de la lecture et de l'interprétation d'un énoncé de problème (troisième phase de Rey) ? Ou serait-il possible de leur donner des indices pour les mettre sur le chemin de la solution (deuxième phase de Rey) ? Les analyses de la présente étude plaident à nos yeux pour une évaluation en plusieurs phases, permettant de mieux différencier et s'adapter aux niveaux des élèves et, ainsi, à mieux les refléter dans les résultats de l'épreuve de référence.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Antonietti, J.-P. (2005). Evaluation des compétences en mathématiques en fin de 4e année primaire : Résultats de la seconde phase de l'enquête Mathéval. Neuchâtel : Institut de recherche et de documentation pédagogique. Neuchâtel : IRDP.

Carette, V. (2004). Les implications de la notion de compétence sur l'évaluation. *Education – Formation,* e-286. Bruxelles.

Conférence Internationale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (1997). *Apprentissage et enseignement des mathématiques : commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement pour les degrés 1 à 4 de l'école primaire*. Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement (COROME).

Conférence Internationale de l'Instruction Publique de la Suisse romande et du Tessin (2002). *Mathématiques sixième année*. Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement (COROME).

De Landsheere, G. (1994). *Le pilotage des systèmes de l'éducation*. Bruxelles : De Boeck.

Département de la formation et de la jeunesse (2006). *Plan d'Études Vaudois (PEV). Version 2006*. Lausanne : DFJ.

Gagnebin, A., Guignard, N. & Jaquet, F. (1997). *Apprentissage et enseignement des mathématiques : Commentaires didactiques sur les moyens d'enseignement*. Neuchâtel : Commission romande des moyens d'enseignement.

Guignard, N. & Antonietti J.-P. (2005). Les résultats des élèves en mathématiques. In Nidegger, Ch. (Eds), *Compétences des jeunes romands : Résultats de la seconde enquête Pisa auprès des élèves de 9e année*. Neuchâtel : IRDP.

Moreau, J. (2008). Résultats des cantons selon les filières. In Nidegger, Ch. (coord.), *PISA 2006 : Compétences des jeunes romands : Résultats de la troisième enquête PISA auprès des élèves de 9e année* (pp. 104-110). Neuchâtel : IRDP.

Pochon, L.-O. (1991). *Connaissances mathématiques à l'école primaire : bilan des acquisitions en fin de cinquième et sixième année primaire*. Berne : Peter Lang.

Rey, B. (2007). Mettre en œuvre et évaluer des compétences à l'école primaire. *Educateur,* 4/2007.

Rey, B., Carette, V., Defrance, A. & Kahn, S. (2003). *Les compétences à l'école : apprentissage et évaluation*. Bruxelles : De Boeck.

Rogiers, X. (2004). L'école et l'évaluation. Des situations pour évaluer les compétences des élèves. Bruxelles : De Boeck.